Второй Южный математический турнир, “Орленок”–2007.

9–11 классы.

Командная олимпиада.

18 сентября 2007 г.

1. На доске написано уравнение $x^2+ax+b=0$. Петя нашел корни t и s этого уравнения. Миша стер коэффициент a и записал вместо него $a+1$. Затем пришла Маша и вместо b написала $b-2$. Наконец, к доске снова подошел Петя и обнаружил, что $t-1$ является корнем нового уравнения. Найдите s.

2. Таблица 2007×2007 заполнена числами $+1$ и -1. Пусть A_i — произведение всех чисел, стоящих в i-й строке, а B_j — произведение всех чисел, стоящих в j-м столбце. Докажите, что $A_1+A_2+\ldots+A_{2007}+B_1+B_2+\ldots+B_{2007} \neq 0$.

3. Прямоугольник $HOMF$ имеет стороны $HO=11$, $OM=5$. В треугольнике ABC точка H — точка пересечения высот, O — центр описанной окружности, M — середина BC, а F — основание высоты, проведенной из вершины A. Найдите сторону BC.

4. При каких натуральных n число 2007 можно представить в виде суммы 10 целых степеней числа n?

5. Среди чисел $a_1,\ldots,a_{100}$ встречаются все натуральные числа от 1 до 100. Выписаны все остатки от деления на 100 чисел a_1, a_1+a_2, $\ldots$, $a_1+a_2+\ldots+a_{100}$. Докажите, что среди них встречаются хотя бы 11 различных.

6. На стороне AC остроугольного треугольника ABC выбрана переменная точка D. Точки E и F — центры окружностей, вписанных в треугольники ABD и BCD. Докажите, что площадь треугольника BEF минимальна тогда, когда D — основание высоты.

Второй Южный математический турнир, “Орленок”–2007.

9–11 классы.

Командная олимпиада.

18 сентября 2007 г.

1. На доске написано уравнение $x^2+ax+b=0$. Петя нашел корни t и s этого уравнения. Миша стер коэффициент a и записал вместо него $a+1$. Затем пришла Маша и вместо b написала $b-2$. Наконец, к доске снова подошел Петя и обнаружил, что $t-1$ является корнем нового уравнения. Найдите s.

2. Таблица 2007×2007 заполнена числами $+1$ и -1. Пусть A_i — произведение всех чисел, стоящих в i-й строке, а B_j — произведение всех чисел, стоящих в j-м столбце. Докажите, что $A_1+A_2+\ldots+A_{2007}+B_1+B_2+\ldots+B_{2007} \neq 0$.

3. Прямоугольник $HOMF$ имеет стороны $HO=11$, $OM=5$. В треугольнике ABC точка H — точка пересечения высот, O — центр описанной окружности, M — середина BC, а F — основание высоты, проведенной из вершины A. Найдите сторону BC.

4. При каких натуральных n число 2007 можно представить в виде суммы 10 целых степеней числа n?

5. Среди чисел $a_1,\ldots,a_{100}$ встречаются все натуральные числа от 1 до 100. Выписаны все остатки от деления на 100 чисел a_1, a_1+a_2, $\ldots$, $a_1+a_2+\ldots+a_{100}$. Докажите, что среди них встречаются хотя бы 11 различных.

6. На стороне AC остроугольного треугольника ABC выбрана переменная точка D. Точки E и F — центры окружностей, вписанных в треугольники ABD и BCD. Докажите, что площадь треугольника BEF минимальна тогда, когда D — основание высоты.