Шестой Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 12-18.09.2011

Блиц-бой. 16 сентября 2011 г.

1. Найдите наибольшее натуральное n такое, что n^2 является разностью двух последовательных кубов, а число $2n+79$ – точный квадрат.

2. Перед корпусом стоят два флагштока. У вожатого имеется 19 флагов – 10 одинаковых синих и 9 одинаковых зеленых. Сколькими способами вожатый может вывесить флаги так, чтобы на каждом флагштоке был хотя бы один флаг и никакие две зеленых флага не висели подряд? (Флаги располагаются на флагштоке сверху вниз, флагштоки различаются.)

3. При некотором целом m многочлен $x^3-2011x+m$ имеет три целых корня a, b, c. Найдите эти корни.

4. Пусть S – сумма всех различных остатков при делении на 1000 чисел вида 2^n с целыми неотрицательными n. Какой остаток S дает при делении на 1000?

5. Сколько существует упорядоченных четверок (a, b, c, d), в которых $1 \leqslant a < b < c < d \leqslant 10$ и $a+d > b+c$?

6. Сколько существует перестановок $a_1, a_2, \ldots, a_{30}$ чисел 1, 2, …, 30 таких, что $a_{n+2}-a_n$ всегда делится на 2, $a_{n+3}-a_n$ всегда делится на 3 и $a_{n+5}-a_n$ всегда делится на 5?

7. G, H, I, J, K, L – середины сторон AB, BC, CD, DE, EF, FA правильного шестиугольника $ABCDEF$, соответственно. Отрезки AH, BI, CJ, DK, EL, FG ограничивают меньший правильный шестиугольник. Найдите отношение площади этого шестиугольника к площади шестиугольника $ABCDEF$.

8. Две высоты треугольника равны 10 и 24, а радиус вписанной окружности равен 4. Найдите площадь треугольника.