Шестой Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 12-18.09.2011

Командная олимпиада. 21 сентября 2010 г.

Старшие лиги

1. В школе учатся 688 учеников – поровну мальчиков и девочек. В день матча "Зенит"–"Рубин" некоторые школьники пропустили занятия. Оказалось, что мальчиков, которые не пришли в школу, на 123 больше, чем девочек, которые пришли. Сколько учеников не пришло в школу в этот день?

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y^2 = y^3, \\ y + x^2 = x^3 \end{cases}$ в вещественных числах.

3. В турнире по футболу участвовали n команд. Каждая команда сыграла ровно по одному матчу с каждой из остальных. Некоторые матчи закончились вничью. Оказалось, что каждая команда выиграла ровно три матча, и при этом не нашлось трех команд A, B и C таких, что A выиграла у B, B выиграла у C и C выиграла у A. Найдите все возможные значения n.

4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB = AD$ и $CB = CD$. Биссектриса угла BDC пересекает сторону BC в точке L. Отрезки AL и BD персекаются в точке M. Оказалось, что $BM = BL$. Чему равен угол $2\angle BAD + 3\angle BCD$?

5. В клетках квадратной таблицы $n \times n$ расставлены числа таким образом, что сумма чисел в любом клетчатом квадрате 3×3 положительна, а в любом клетчатом квадрате 4×4 – отрицательна. При каких n такое возможно?

6. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям
(i) $f(x) = x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)$ при всех $x \neq 0$;
(ii) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ при всех x, y;
(iii) $f(1) = 1$.

7. Пусть p – простое число, а различные натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ $(k \geqslant 3)$ меньше p. Докажите, что количество натуральных $n < p$ таких, что остатки от деления чисел na_1, na_2, $\ldots$, na_k на p образуют возрастающую последовательность, не превосходит $\frac{2p}{k+1}$.

8. На продолжении биссектрисы AL за точку L остроугольного треугольника ABC выбрана точка D такая, что $\angle BDC + \angle BAC = 90°$. Точка D' диаметрально противоположна точке D на описанной окружности треугольника BDC. Точка E — середина дуги BAC описанной окружности треугольника ABC. Отрезки AD и ED' пересекаются в точке F. Точка T – проекция F на BC. Докажите, что $\angle BED = \angle TAC$.

Старт-лига

1. В школе учатся 688 учеников – поровну мальчиков и девочек. В день матча "Зенит"–"Рубин" некоторые школьники пропустили занятия. Оказалось, что мальчиков, которые не пришли в школу, на 123 больше, чем девочек, которые пришли. Сколько учеников не пришло в школу в этот день?

2. Для каких n можно расположить шашки в клетках доски $n \times n$ (в каждой клетке – не более одной шашки) так, чтобы в любых двух столбцах шашек было поровну, а в любых двух строках – не поровну?

3. P – точка пересечения биссектрис треугольника ABC, точки A_1, B_1, C_1 – проекции P на стороны BC, AC и AB соответственно. Докажите, что угол $B_1A_1C_1$ – острый.

4. Одно-, двух-, пяти- и десятирублёвые монеты выложены в ряд. Между любыми двумя монетами достоинством в 1 рубль лежит хотя бы одна монета, между монетами в 2 рубля – хотя бы две монеты, между монетами в 5 рублей – хотя бы пять монет, между монетами в 10 рублей – хотя бы 10 монет. Какое количество монет может быть в ряду?

5. В точке 1 числовой оси сидит кузнечик. Длина каждого его прыжка равна (по его желанию) либо 3, либо 4. Может ли он за 99 прыжков побывать во всех целых точках от 2 до 100?

6. Сколько существует натуральных чисел, не превышающих миллиарда, в каждом из которых нет трёх подряд идущих цифр одной чётности?

7. Назовем натуральное число надёжным, если оно содержит любой простой делитель не менее чем во второй степени. Докажите, что существует бесконечно много пар последовательных натуральных чисел, каждое из которых является надёжным.