Седьмой Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 17-25.09.2011

Командная олимпиада. 18 сентября 2012 г.

Старшие лиги

1. Если числитель и знаменатель дроби $\frac{a}{b}$, где a и b — натуральные числа, увеличить на 1, то дробь увеличится на $\frac{1}{20}$. А если сделать так еще раз с полученной дробью, то получится дробь, которая больше первоначальной на $\frac{1}{12}$. Найдите значение $\frac{a}{b}$.

2. Найдите множество значений, которые может принимать средний по величине угол выпуклого пятиугольника.

3. Дан треугольник ABC. Касательная к описанной вокруг него окружности, проведенная в точке A, пересекает прямую BC в точке P. Точки Q и R симметричны точке P относительно прямых AB и AC. Докажите, что $QR \perp BC$.

4. Даны действительные числа a и b, лежащие в отрезке $[0, 1]$. Докажите неравенство
$$\sqrt{a^3b^3} + \sqrt{(1-a^2)(1-ab)(1-b^2)} \leq 1.$$

5. В классе учатся n учеников. Каждый день двое из них дежурят. Требуется составить график дежурств на некоторый период времени так, чтобы для каждых двух учеников нашёлся день, когда один из них дежурит, а другой нет. Какое наименьшее количество дней может охватывать такой график?

6. Даны две перпендикулярные скрещивающиеся прямые a и b. Они пересекают три данные различные параллельные плоскости соответственно в точках A_1 и B_1, A_2 и B_2, A_3 и B_3. Докажите, что три сферы, построенные на отрезках A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 как на диаметрах, пересекаются по одной окружности.

7. Пусть $P(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами такой, что для каждого натурального n число $P(P(n))$ при делении на n даёт остаток $n-1$. Докажите, что у многочлена $P(x)$ нет целых корней.

8. Дано натуральное число $d \geq 2$ и конечная система отрезков на прямой. Известно, что из любых $2d-2$ отрезков этой системы можно выбрать d отрезков, имеющих общую точку. Докажите, что из данной системы отрезков можно выбросить $d-2$ отрезков так, чтобы оставшиеся отрезки имели общую точку.