Седьмой Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 17–25.09.2012

Гранд-лига, 1 тур. 19.09.2012

1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA' и BB'. Через точки C и B' проведены две окружности, касающиеся прямой AB в точках P и Q так, что A лежит между Q и B. Докажите, что прямые QB' и PA' пересекаются на описанной окружности треугольника $A'B'C$.

2. В графе v вершин и e ребер; ребра пронумерованы различными натуральными числами от 1 до e. Докажите, что существует (не обязательно простой) путь, состоящий хотя бы из $2e/v$ ребер, при прохождении которого номера ребер идут в возрастающем порядке.

3. Треугольник ABC вписан в окружность Ω. На стороне BC взята точка D так, что $AD = DC$. Докажите, что два из трех центров вневписанных окружностей треугольника ABD лежат на окружности Ω.

4. Дано простое число p. Найдите все натуральные n, обладающие следующим свойством: если при некотором целом x число $x^n - 1$ делится на p, то $x^n - 1$ делится на p^2.

5. На плоскости даны $2n$ точек. Два игрока по очереди выбирают по одной точке до тех пор, пока они не закончатся (одну точку дважды выбирать нельзя). Проигрывает тот, у кого сумма попарных расстояний между выбранными им точками меньше, чем у соперника. Кто выигрывает при правильной игре — начинающий или его противник? (Все расстояния между данными точками и все суммы попарных расстояний для разных наборов точек попарно различны.)

6. Дано натуральное число $n > 1$. На координатной плоскости отметили все точки с координатами (x, y), где $x, y \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Какое наибольшее количество точек из них можно покрасить так, чтобы никакие три окрашенные точки не являлись вершинами прямоугольного треугольника?

7. Дан тетраэдр. Может ли радиус вписанной окружности одной из его граней быть меньше, чем радиус вписанной в тетраэдр сферы?

8. Неотрицательные вещественные числа a, b, c удовлетворяют условию $\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}+\dfrac{c}{1+c}=1$. Докажите, что $abc \leqslant \dfrac{1}{8}$.

9. Существует ли бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ такая, что для любой возрастающей арифметической прогрессии $b_1, b_2, b_3, \ldots$ с натуральными членами последовательность $a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \ldots$ содержит конечное число простых чисел (возможно, ни одного)?

10. Сеня решил квадратное уравнение $2x^2 + bx + c = 0$, а Андрюша уменьшил в этом уравнении каждый из трех коэффициентов на 1 и решил полученное уравнение. Каждый из ребят получил в ответе пару различных чисел, причем Андрюшины числа получаются из Сениных возведением в квадрат. Найдите все возможные пары (b, c).