Седьмой Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 17–25.09.2012

Гранд-лига, 2 тур. 20.09.2012

1. Действительные числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ таковы, что для любого натурального k сумма k-ых степеней этих чисел неотрицательна. Докажите, что для любого $x \geqslant \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ выполнено неравенство $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n) \leqslant x^n - a_1^n$.

2. По кругу расставлены 99 положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{99}$. Известно, что если выбрать из них несколько чисел, среди которых нет двух соседних, то их сумма будет меньше, чем сумма оставшихся чисел. Докажите, что существует единственный (с точностью до движения) описанный 99-угольник, длины последовательных сторон которого равны $a_1, a_2, \ldots, a_{99}$.

3. Дана трапеция $ABCD$ с бóльшим основанием AB. Прямая BD является биссектрисой угла D. Прямая, проходящая через точку C параллельно AD, пересекает отрезки BD и AB в точках E и F соответственно. Точка O — центр описанной окружности треугольника BEF. Оказалось, что $\angle ACO = 60^\circ$. Докажите, что $CF = AF + FO$.

4. Дано натуральное $n > 1$. Пусть S — множество, состоящее из n элементов. Для подмножества $K \subset S$ положим $K' = S \setminus K$. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_k$ — подмножества множества S, обладающие следующим свойством: для любых i, j, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, ровно одно из множеств $A_i \cap A_j$, $A_i \cap A_j'$, $A_i' \cap A_j$, $A_i' \cap A_j'$ пустое. Найдите наибольшее возможное значение k.

5. Салон самолета состоит из 50 рядов по 6 мест, помеченных буквами A, B, C, D, E, F. 173 пассажира заняли свои места в салоне. Докажите, что найдутся два ряда, которые заняты одинаковым образом (то есть в этих рядах заняты места, помеченные одними и теми же буквами).

6. Последовательность положительных чисел $a_1, a_2, \ldots,$ такова, что для любого натурального n среди чисел $a_1, \ldots, a_n$ хотя бы половина чисел больше, чем $2a_{n+1}$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

7. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Пусть E — точка пересечения его диагоналей, а K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что радиусы окружностей, описанных вокруг треугольников KLE и MNE, равны.

8. На доске написаны $2n$ целых чисел. Оказалось, что, какие бы n из них ни взять, среди оставшихся n чисел найдутся несколько (но не все n), разность суммы которых и суммы взятых делится на 2012. Докажите, что на доске найдутся несколько чисел с суммой, кратной 2012.

9. Пусть $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — функция, определенная следующим правилом: $f(1) = 1$, а если $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение числа $n > 1$ на простые сомножители ($p_1, \ldots, p_k$ — попарно различные простые числа и все $\alpha_i \in \mathbb{N}$), то $f(n) = \alpha_1^{p_1} \ldots \alpha_k^{p_k}$. Положим $f^1(n) = f(n)$, $f^k(n) = f(f^{k-1}(n))$ при $k \geqslant 2$. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется номер $t \in \mathbb{N}$ такой, что $f^{t+2}(n) = f^t(n)$.

10. Обозначим через a_n максимальную степень пятерки, на которую делится n (например, $a_7 = 1$, $a_{100} = 25$). Докажите, что если $j > i + 4$, то число $\dfrac{1}{a_i} + \dfrac{1}{a_{i+1}} + \ldots + \dfrac{1}{a_j}$ не является целым.