Седьмой Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 17–25.09.2012

Гранд-лига, 3 тур. 22.09.2012

1. Точки X, Y, Z, W расположены на сторонах AB, BC, CD и DA квадрата $ABCD$ соответственно так, что $\angle BXY = \angle CYZ = \angle DZW = \angle AWX \neq 45^\circ$. Докажите, что $XYZW$ – квадрат.

2. Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность ω_1 касается отрезков AB и AD, а окружность ω_2 касается отрезков BC и CD. Оказалось, что существует окружность, которая касается прямых AD и DC, а также касается внешним образом окружностей ω_1 и ω_2. Докажите, что существует окружность, которая касается прямых AB и BC, а также касается внешним образом окружностей ω_1 и ω_2.

3. Можно ли раскрасить все ребра полного графа на 3000 вершинах в 10 цветов так, чтобы не было одноцветных треугольников?

4. Какое наименьшее количество ладей можно расставить на доске 100×100 так, чтобы каждая клетка находилась под ударом хотя бы двух ладей, стоящих на других клетках? Считается, что клетку бьют все ладьи, стоящие с ней на одной горизонтали или вертикали (но не в ней самой).

5. В пространстве дано бесконечное множество точек. Докажите, что из этих точек можно выбрать 100 таких, что все попарные расстояния между выбранными точками будут различны.

6. Точка P на диагонали BD параллелограмма $ABCD$ такова, что $\angle PCB = \angle ACD$. Описанная окружность треугольника ABD вторично пересекает диагональ AC в точке E. Докажите, что $\angle AED = \angle PEB$.

7. Найдите все функции $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ такие, что для всех $x, y, z \in \mathbb{Q}$ выполнено
$$f(x + f(y + f(z))) = y + f(x + z).$$

8. Дано натуральное число n. Докажите, что уравнение $nx^2 + y^3 = z^4$ имеет бесконечно много решений в целых x, y, z таких, что НОД$(y, z) = 1$.

9. Изначально на доске написано число 1. Двое играют в игру: каждый своим ходом прибавляет к числу на доске квадрат натурального числа. Если после чьего-то хода на доске оказался квадрат натурального числа — этот игрок немедленно выигрывает, и игра заканчивается. Если после 1 000 000 ходов каждого игрока этого не случилось — объявляется ничья. Может ли какой-нибудь из игроков выиграть, как бы ни ходил второй?

10. Действительные числа a, b, c таковы, что $a \geqslant b \geqslant c > 0$. Докажите, что
$$(a - b + c)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant 1.$$