Седьмой Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 17–25.09.2012

Гранд-лига. Полуфинал (4 тур). 23.09.2012

1. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка P такая, что $PA = 1$, $PB = 2$, $PC = 3$. Найдите $\angle APB$.

2. По кругу расставлены числа $x_1, x_2, \ldots, x_{2012}$, не меньшие 1 и такие, что соседние числа отличаются не больше, чем на 1. Найдите наибольшее возможное значение выражения
$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_{2012}}{x_1}.$$

3. Дана бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$ такая, что $a_n \leqslant \sqrt{n^3}$. Пусть $q_1 < q_2 < \ldots$ — все простые числа, на которые делится хотя бы один из членов последовательности $a_1, a_2, \ldots$, выписанные в порядке возрастания. Докажите, что $q_n \leqslant 100^n$.

4. Дан граф G, степени всех вершин которого равны 100. Рассмотрим произвольный граф G', полученный из G удалением некоторых (возможно, всех или ни одного) его ребер. Назовём *ценой вершины* графа G' ее удвоенную степень, уменьшенную на 100, а *ценой графа* G' — произведение цен его вершин. Докажите, что средняя цена всех рассматриваемых графов — целое число.

5. В ковровой дорожке 1 м$\times$100 м вырезано несколько непересекающихся квадратных дыр (дыры не имеют общих точек, даже граничных, и могут примыкать к краю дорожки). Стороны дыр меньше метра и параллельны сторонам дорожки, сумма их периметров равна 10 м. Улитка хочет доползти из какой-нибудь точки в начале дорожки в какую-нибудь точку в конце её по пути, состоящему из нескольких отрезков. Какого наименьшего числа отрезков ей заведомо хватит? (Точки начала и конца пути она выбирает сама.)

6. На стороне CD параллелограмма $ABCD$ построен наружу равносторонний треугольник CDE. На плоскости дана произвольная точка P. Докажите неравенство $PA + PB + AD \geqslant PE$.

7. Имеется доска $n \times n$ и неограниченный набор салфеток 2×2, у каждой из них две клетки на одной из диагоналей окрашены красным, а две другие — синим. Салфетки одна за другой выкладываются на доску (каждая покрывает клетчатый квадратик 2×2) до тех пор, пока все клетки не будут покрыты (одна клетка может быть покрыта более одного раза). Найдите максимальное количество красных клеток в итоговой ситуации.

8. Фиксированные окружности Ω и ω касаются внутренним образом в точке N. Переменная хорда AB большей окружности Ω касается ω в точке K. Прямая NK пересекает Ω вторично в точке C. Пусть Q и P — вторые точки пересечения прямых NA и NB с ω, а D и E — вторые точки пересечения прямых CQ и CP с ω. Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника CDE, не зависит от положения точки K на ω.

9. Найдите все натуральные n, для которых все коэффициенты многочлена
$$(x^2 + x + 1)^n - (x^2 + x)^n - (x^2 + 1)^n - (x + 1)^n + x^{2n} + x^n + 1$$
делятся на 7.

10. Натуральные числа a, b, c таковы, что каждое из трех чисел $\frac{a^2}{a+b}$, $\frac{b^2}{b+c}$, $\frac{c^2}{c+a}$ является простым числом. Докажите, что $a = b = c$.