Седьмой Южный математический турнир

ВДЦ “Орлёнок”, 18-25.09.2012

Первый тур. Премьер-лига. 19 сентября 2012 г.

1. На числовой прямой каждой целой точке поставлено в соответствие некоторое вещественное число, причём точке O соответствует число 1,993. Докажите, что для некоторых 100 различных точек модуль суммы соответствующих им чисел больше 1.

2. На плоскости даны $2n$ точек. Два игрока по очереди выбирают по одной точке до тех пор, пока они не закончатся. Проигрывает тот, у кого сумма попарных расстояний между выбранными им точками меньше, чем у соперника. Кто выиграет при правильной игре – начинающий или его партнёр? (Все расстояния между данными точками и все суммы попарных расстояний для разных наборов точек попарно различны.)

3. Найдите все многочлены $P(x)$ третьей степени, у которых есть хотя бы два разных вещественных корня, один из которых равен 7, и которые при каждом вещественном t удовлетворяют условию: если $P(t) = 0$, то $P(t+1) = 1$.

4. Существует ли бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел a_1, a_2, a_3, $\ldots$ такая, что для любой возрастающей арифметической прогрессии b_1, b_2, b_3, $\ldots$ с натуральными членами последовательность a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, $\ldots$ содержит конечное число простых чисел (возможно, ни одного)?

5. AD, BE, CF – высоты остроугольного треугольника ABC. Прямые EF и BC пересекаются в точке P. Прямая, проходящая через точку D параллельно EF, пересекает прямые AB и AC в точках Q и R соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника QPR проходит через середину стороны BC.

6. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n, для которых $\varphi(n) = \frac{n}{3}$. (Функция Эйлера $\varphi(n)$ определяется как количество натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n.)

7. Дан квадрат $ABCD$. Рассмотрим все правильные треугольники KLM такие, что точки K, L, M лежат на сторонах AB, BC, CD соответственно. Найдите геометрическое место середин отрезков KM.

8. Положительные числа a, b, c удовлетворяют условию

$$\frac{a^2}{1+a^2} + \frac{b^2}{1+b^2} + \frac{c^2}{1+c^2} = 1.$$

Докажите, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{1}{4}$.