Седьмой Южный математический турнир

ВДЦ “Орлёнок”, 18-25.09.2012

Второй тур. Премьер-лига. 20 сентября 2012 г.

1. На доске написаны 100 целых чисел. Оказалось, что, какие бы 50 из них ни взять, среди оставшихся 50 чисел найдутся несколько (но не все 50) таких, разность суммы которых и суммы взятых делится на 2012. Докажите, что на доске найдутся несколько чисел с суммой, кратной 2012.

2. Докажите, что сумма длин любых нескольких сторон описанного n-угольника, среди которых нет соседних, не превосходит суммы длин остальных сторон.

3. В стране 96 городов, из которых 24 – областные, некоторые пары городов соединены между собой дорогами (но не более чем одной), причём любой путь по дорогам между двумя обычными городами, если он есть, проходит хотя бы через один областной город. Какое наибольшее количество дорог может быть в этой стране?

4. Девушка Клерхен перемножила два трёхзначных числа, но, к сожалению, получила ответ на 64000 меньше правильного. Для проверки она поделила ответ на один из сомножителей и получила в остатке 384. Найдите этот сомножитель.

5. Дана трапеция $ABCD$ с большим основанием AB. Прямая BD является биссектрисой угла D. Прямая, проходящая через точку C параллельно AD, пересекает отрезки BD и AB в точках E и F соответственно. Точка O – центр описанной окружности треугольника BEF. Оказалось, что $\angle ACO = 60^\circ$. Докажите, что $CF = AF + FO$.

6. Сумма трёх действительных чисел $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3$ неотрицательна. Докажите, что для любого $x \geqslant a_1$ выполнено неравенство $(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \leqslant x^3 - a_1^3$.

7. Разность двух целых чисел x и y делится на разность целых чисел a и b, а произведение $xy = -(a - b)^2$. Докажите, что $x + y = 0$.

8. На острове Контрастов живут рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. 111 островитян собрались в конференц-зале. Некоторые из них сделали заявление, что в зале чётное число рыцарей, Могли ли все остальные сделать заявление, что в зале нечётное число лжецов?