Седьмой Южный математический турнир
ВДЦ “Орлёнок”, 18-25.09.2012

Четвертый тур. Премьер-лига. Бои за 1–4 места. 23 сентября 2012 г.

1. В ковровой дорожке 1×100 м вырезано несколько непересекающихся квадратных дыр. Стороны дыр меньше метра и параллельны сторонам дорожки, сумма их периметров равна 6 м. Вася хочет дойти из какой-нибудь точки в начале дорожки в какую-нибудь точку в конце её по пути, состоящему из наименьшего числа отрезков. Какого наименьшего числа отрезков ему заведомо хватит? (Точки начала и конца пути он выбирает сам.)

2. В правильном 2012-угольнике проведены стороны и главные диагонали. Двое по очереди отмечают вершину, не соединённую отрезком с ранее отмеченной вершиной. Докажите, что последний ход сделает первый игрок, как бы ни играли соперники.

3. Имеется доска $n \times n$ и неограниченный набор салфеток 2×2, у каждой из них две клетки на одной из диагоналей окрашены красным, а две другие — синим. Салфетки одна за другой выкладываются на доску (каждая покрывает клетчатый квадратик 2×2) до тех пор, пока все клетки не будут покрыты (одна клетка может быть покрыта более одного раза). Найдите максимальное количество красных клеток в итоговой ситуации.

4. На стороне CD параллелограмма $ABCD$ построен наружу равносторонний треугольник CDE. На плоскости дана произвольная точка P. Докажите неравенство $PA+PB+AD \geqslant PE$.

5. Дан ромб $ABCD$ с острым углом A. На диагонали AC и стороне BC выбраны точки M и N соответственно таким образом, что $DM = MN$. Отрезок DN пересекает AC в точке P, луч DM пересекает сторону AB в точке Q. Докажите, что $DP = PQ$.

6. Натуральные числа a, b, c таковы, что числа $\frac{a^2}{a+b}$, $\frac{b^2}{b+c}$ и $\frac{c^2}{c+a}$ – натуральные и простые. Докажите, что $a = b = c$.

7. Пусть $\xi(n)$ – количество различных простых делителей натурального числа n. Докажите, что для бесконечно многих n число $\xi(n) + \xi(n+1) + \ldots + \xi(n+999)$ нечётно.

8. Известно, что для некоторых вещественных чисел a, b, c выполняется неравенство $\frac{1}{2}|a+b| + \frac{1}{2}|a-b| < c$. Докажите, что $|a| < c$ и $|b| < c$.