Седьмой Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 18-25.09.2012

Четвертый тур. Премьер-лига. Бои за 5–8 места. 23 сентября 2012 г.

1. Могло ли сохраниться множество простых делителей стозначного натурального числа после того, как в его десятичной записи поменяли местами две различные соседние ненулевые цифры?

2. Два игрока по очереди отмечают вершины правильного 2012-угольника. Каждый игрок своим ходом отмечает любую ранее не отмеченную вершину, не соседнюю ни с какой из отмеченных и не противоположную ни одной из них. Игра прекращается, когда очередной игрок не может сделать ход. Докажите, что последний ход сделает первый игрок, как бы ни играли соперники.

3. В какое наибольшее количество цветов можно покрасить клетки таблицы 4×4 так, чтобы для любых двух цветов нашлись клетки этих цветов, имеющие общую сторону?

4. Можно ли расположить на плоскости 100 точек так, чтобы любые три из них образовывали треугольник с углом, большим $120°$?

5. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL. Центр окружности, вписанной в треугольник ALC, совпадает с центром описанной окружности треугольника ABC. Найдите углы треугольника ABC.

6. В однокруговом футбольном турнире (каждая команда сыграла ровно по одному матчу с каждой из остальных) участвовало 7 команд. По итогам турнира оказалось, что команды, занявшие первые три места, набрали ровно половину всех очков. Могло ли по итогам турнира оказаться ровно 6 ничьих? (За победу даётся 3 очка, за ничью – 1, за поражение – 0.)

7. Пусть $\xi(n)$ – количество различных простых делителей натурального числа n. Докажите, что для бесконечно многих n число $\xi(n) + \xi(n+1) + \ldots + \xi(n+999)$ нечётно.

8. Известно, что для некоторых вещественных чисел a, b, c выполняется неравенство $\frac{1}{2}|a+b| + \frac{1}{2}|a-b| < c$. Докажите, что $|a| < c$ и $|b| < c$.