СТАРТ-ЛИГА

I ТУР. 19 сентября 2012 г.

1. Грибник заблудился в длинной лесополосе шириной 1 км. Он решает выйти из лесополосы по намеченной траектории. Может ли длина этой траектории быть меньше 2,5?

2. Новая шахматная фигура «лягушка» поочерёдно делает ходы на 1, 2, 3, 1, 2, 3, … клетки (по горизонтали или вертикали). Какое наибольшее количество клеток лягушка может посетить на доске 8×8 (без учёта исходной клетки), если ей нельзя вставать на клетки, на которых она уже была?

3. На доске написаны три правильные несократимые дроби, в сумме дающие 1, причём их числители – различные натуральные числа. Могло ли оказаться так, что если каждую из этих дробей «перевернуть» (т.е. заменить на обратную), то сумма полученных дробей будет натуральным числом?

4. Дима и Вова решали олимпиаду по математике, состоящую из двух задач: одна по геометрии, другая по алгебре. Задачу по алгебре Дима решил вдвое быстрее Вовы, а задачу по геометрии решал вдвое дольше, чем Вова, но все-таки закончил олимпиаду раньше. Кто потратил больше времени: Дима – на задачу по алгебре, или Вова на задачу по геометрии?

5. Найдите наибольшее натуральное число, в десятичной записи которого все цифры различны и сумма любых двух из них является составным числом.

6. Дан параллелограмм $ABCD$ с углом B, равным 150°. На сторонах параллелограмма во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники ABN и BCK. Докажите, что треугольник DKN равносторонний.

7. С натуральным числом, большим 1, разрешается выполнять следующую операцию: вычитать из него его собственный делитель (т.е. натуральный делитель, меньший самого числа), после чего с новым числом (если оно больше 1) можно проделать такую же операцию. Докажите, что любое натуральное число n в пределах от 2 до 2012 можно превратить в 1 не более, чем за 19 указанных операций.

8. После закончившегося турнира по волейболу Петя выписал на бумажку число побед, одержанных каждой командой, а Вася – число поражений. При каком числе команд наборы чисел на листках обязательно совпадают?