Седьмой Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 18-25.09.2012

Четвертый тур. Старт-лига. Бои за 1–4 места. 23 сентября 2012 г.

1. Внутри параллелограмма $ABCD$ взята точка E такая, что $ED = CD$. Точки K и M – середины отрезков BE и AD соответственно. Докажите, что прямая KM параллельна биссектрисе угла CDE.

2. На плоскости отмечены пять вершин выпуклого пятиугольника. Рассматриваются все треугольники с вершинами в этих точках. Какое наибольшее количество остроугольных может быть среди них?

3. Каждую букву алфавита закодировали последовательностью нулей и единиц. Затем в слове ФИЗОХИМОГЕОБИОМАТЕМАТИКУЛЬТУРА буквы заменили их кодами. Может ли полученная последовательность содержать менее 120 символов при условии, что исходное слово однозначно восстанавливается при наличии таблицы кодов?

4. Для любых двух незнакомых людей в компании существует ровно двое общих знакомых. Дима и Вова знакомы друг с другом, но не имеют общих знакомых. Докажите, что Дима и Вова имеют одинаковое число знакомых из этой компании.

5. В однокруговом футбольном турнире (каждая команда с каждой сыграла ровно по одному матчу) команды, занявшие три призовых места, набрали ровно половину всех очков. Сколько команд могло участвовать в турнире? За победу в футболе даётся 3 очка, за ничью – 1, за поражение – 0.

6. Могло ли сохраниться множество простых делителей натурального числа $n > 10$ после того, как в его десятичной записи поменяли местами две различные ненулевые цифры?

7. Решите в целых числах уравнение $x^3 + 2y^3 - 4x - 5y + z^2 = 2012$.

8. Сколькими способами из шахматной доски можно вырезать две доминошки так, чтобы оставшуюся доску нельзя было разрезать на доминошки?

Седьмой Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 18-25.09.2012

Четвертый тур. Старт-лига. Бои за 5–10 места. 23 сентября 2012 г.

1. В треугольнике ABC $\angle A = 60^\circ$. Докажите, что $2BC + AC > 2AB$.

2. Каждую из букв А, Б, М, П закодировали последовательностью нулей и единиц. Затем в слове БАБАМАМАПАПА буквы заменили их кодами. Может ли полученная последовательность содержать менее 24 символов при условии, что исходное слово однозначно восстанавливается при наличии таблицы кодов?

3. На клетчатом листе бумаги нарисован квадрат 101×101. Дима и Вова играют в игру: каждый из них в свой ход помещает в квадрат, нарисованный соперником, свой квадрат со стороной на 1 клетку меньше (стороны квадратов идут по линиям сетки). Вова хочет последним ходом поместить квадрат 1×1 в центр исходного квадрата. Дима хочет ему помешать. Кто из них выиграет? (Первым ходом Дима рисует квадрат 100×100).

4. Можно ли клетки таблицы 8×8 покрасить в 16 цветов так, чтобы для любых двух цветов нашлись клетки этих цветов, имеющие общую сторону?

5. Для любых двух незнакомых людей в компании существует ровно двое общих знакомых. Дима и Вова знакомы друг с другом, но не имеют общих знакомых. Докажите, что Дима и Вова имеют одинаковое число знакомых из этой компании.

6. В однокруговом футбольном турнире (каждая команда с каждой сыграла ровно по одному матчу) участвовало 7 команд. По итогам турнира оказалось, что команды, занявшие призовые места, набрали ровно половину всех очков. Могло ли по итогам турнира оказаться ровно 6 ничьих? (за победу даётся 3 очка, за ничью – 1, за поражение – 0)

7. Могло ли сохраниться множество простых делителей трёхзначного натурального числа после того, как в его десятичной записи поменяли местами две различные ненулевые цифры?

8. На плоскости отмечены пять вершин выпуклого пятиугольника. Рассматриваются все треугольники с вершинами в этих точках. Какое наибольшее количество остроугольных может быть среди них?