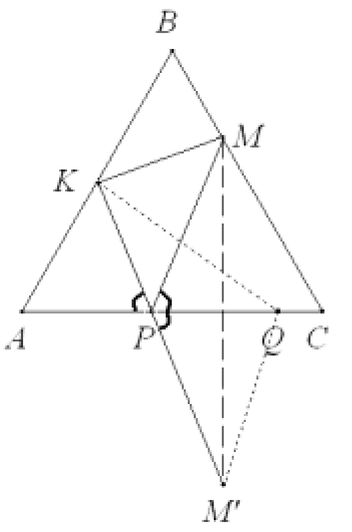
X Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». VII Турнир математических игр.

Математическая игра «Дуэль». ***Младшая лига (7-9 классы).*** **Решения**. ***12 сентября 2014 года***

1. Дан равносторонний треугольник ABC. Точка K – середина стороны AB, точка M лежит на стороне BC, причём BM:MC=1:2. На стороне AC выбрана точка P так, что периметр треугольника PKM – наименьший из возможных. В каком отношении точка P делит сторону AC, считая от точки A? **(<u>3:4</u>. Т.к. отрезок *KM* зафиксирован, то периметр треугольника PKM наименьший из возможных тогда и только тогда, когда длина ломаной *KPM* – наименьшая из возможных (см. рисунок). Для того, чтобы построить такую точку *P*, достаточно рассмотреть точку *M'*, симметричную точке *M* относительно прямой *AC*. Тогда *P* – точка пересечения *KM'* и *AC*. Действительно, длина ломаной *KPM* равна *KP+PM=KP+PM'=KM'*. Для любой точки *Q* отрезка *AC*, отличной от *P*, *KQ+QM=KQ+QM'>KM'*. Т.к. ∠*MPC*=∠*M'PC*=∠*KPA*, то треугольники *MPC* и *KPA* подобны по двум углам. Следовательно, *AP*:*PC*=*AK*:*CM*=1/2:2/3=3:4.)**



2. В квадратной таблице $n\times n$ записаны числа так, что сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце меньше 1. Укажите наименьшее k такое, что для любой таблицы всегда можно увеличить k чисел так, чтобы суммы чисел в строках и столбцах стали равными 1. **(<u>*k*=2*n*–1</u>. Рассмотрим произвольную клетку таблицы. Увеличим число в ней так, чтобы сумма в одном из содержащих ее рядов (строке или столбце) стала *равна* 1, а в другом – *не превысила* 1. Далее рассмотрим столбец и строку, суммы чисел в которых ещё *меньше* 1 (если такие есть), и поступим аналогично с числом, стоящим в клетке на их пересечении. И так далее. Не позже, чем после 2*n*–1 "ходов" либо строчки, либо столбцы закончатся. Пусть, например, во всех строчках сумма стала равна 1. Так как в этот момент сумма чисел в каждом столбце не превосходит 1, а сумма всех чисел в таблице равна *n*, то сумма чисел в каждом столбце должна быть *равна* 1. Пример таблицы, которую нельзя довести до нужного состояния, увеличив менее чем 2*n*–1 чисел: в каждой клетке верхней строки записано число –*n*, во все остальные клетки – нули. Все числа первого столбца, кроме верхнего, можно увеличивать не более, чем на 1. Но этого недостаточно, чтобы сумма чисел в первом столбце стала равной 1. Таким образом, нам придется увеличить верхнее число первого столбца. Аналогично доказывается, что придется увеличить каждое из чисел верхней строки. Кроме того, надо увеличить как минимум по одному числу в каждой из остальных строк.)**

3. Найдите три каких-нибудь решения уравнения $2^{2014}+2^{1014}+2^x=y^2$ в натуральных числах. *Ответ обосновать.* **(Представим левую часть в виде квадрата суммы двух чисел в разных вариантах, а именно: 1) $(2^{1007}+2^{507})^2$; 2) $(2^{1007}+2^{x/2})^2$; 3) $(2^{507}+2^{x/2})^2$. В первом случае $2^x=2\cdot2^{1514}\Leftrightarrow x=1515,\ y=2^{1007}+2^{507}$. Во втором случае $2^{1014}=2\cdot2^{1007+x/2}\Leftrightarrow x=12,\ y=2^{1007}+2^6$. В третьем случае $2^{2014}=2\cdot2^{507+x/2}\Leftrightarrow x=3012,\ y=2^{1506}+2^{507}$.)**

4. Расставьте на шахматной доске 4 ферзя, 4 слона и 4 короля так, чтобы ни одна из фигур не била никакую другую. **(Воспользуемся знаменитой центрально-симметричной расстановкой 8 ферзей, не бьющих друг друга. Поставим на их место по очереди слонов и ферзей так, чтобы все слоны оказались на краю. Теперь в углы поставим королей (см. рис.). Заметим также, что эта конструкция удовлетворяет методу пропеллера, но поворот относительно центра не на 90°, напрашивавшийся в силу количеств фигур, равных 4, а на 180°.)**

к			с				к
					ф		
							с
	ф						
						ф	
с							
		ф					
к				с			к

5. Приведите пример выпуклого четырёхугольника, любую вершину которого можно перенести в другую точку так, чтобы новый четырёхугольник был равен исходному. *Пример обосновать.* **(<u>Подойдёт равнобочная трапеция *ABCD* с углами 72° при большем основании *AD* и условием *AB=BC=CD*, которая есть часть правильного пятиугольника *ABCDE*.</u> Тогда любую вершину можно перенести в точку E и вместе с тремя другими она будет давать такой же четырёхугольник.)**

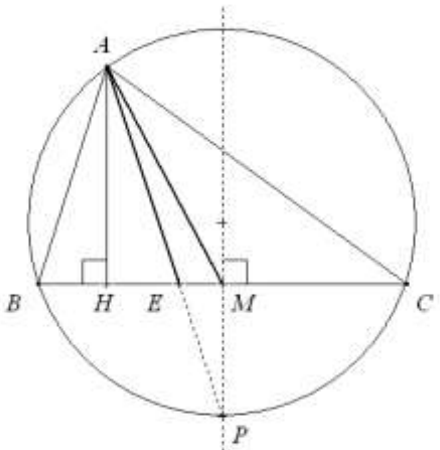
6. Найдите какое-нибудь шестизначное число, десятичная запись которого не заканчивается нулями, которое при вычеркивании одной (не первой) цифры уменьшается в целое число раз. *Пример обоснуйте.* **(например, <u>180 625</u>:10625=17)**

7. Сколько существует семизначных чисел, в которых каждая цифра, кроме последней, делится на следующую за ней справа цифру? **(<u>218 чисел</u>. Рассмотрим все наборы различных цифр, удовлетворяющих условию (а цифры в наборе идут в невозрастающем порядке, при этом ещё нельзя использовать цифру 0): 1). Все цифры равны – 9 вариантов (кроме цифры 0). 2). Две различные цифры - 14 вариантов (2…1, 3…1, …, 9…1, 4…2, 6…2, 8…2, 6…3, 9…3, 8…4), в каждом из которых переход к другой цифре может быть в любом из шести промежутков среди семи цифр. Всего 14·6=84 числа. 3). Три различных цифры – 7 вариантов (4…2…1, 6…2…1, 8…2…1, 6…3…1, 9…3…1, 8…4…1, 8…4…2), в каждом из которых переход к новой цифре в двух промежутках из шести. Всего $7\cdot C_6^2 = 7\cdot\dfrac{6\cdot 5}{2} = 105$ чисел. 4). Четыре различных цифры – 1 вариант (8…4…2…1). Всего $C_6^3 = \dfrac{6!}{3!\cdot 3!} = 20$ чисел. Таким образом, условию задачи удовлетворяют 9+84+105+20=218 чисел.)**

8. Сколько различных по величине или по расположению прямоугольников, состоящих из целого числа клеток, можно начертить на шахматной доске 8×8? **(<u>1296</u>. <u>*Решение* 1.</u> Каждый прямоугольник определяется своими двумя противоположными вершинами, первую из которых можно выбрать из 81=9² узлов решётки, вторую – среди 64=8² узлов, не лежащих с первым выбранным узлом в одном горизонтальном или вертикальном ряду. Но заметим, что каждый прямоугольник нами был подсчитан 4 раза, т.к. первой вершиной могла быть выбрана любая из 4 вершин прямоугольника, а вторая вершина определялась однозначно – противоположная вершина прямоугольника. Значит, всего существует $81\cdot 64/4=9^2\cdot 4^2=36^2=1296$ прямоугольников. <u>*Решение* 2.</u> Каждый прямоугольник определяется парой вертикальных и парой горизонтальных линий сетки. Каждую такую пару можно выбрать $C_9^2 = \dfrac{9\cdot 8}{2} = 36$ способами. Значит, всего $36^2=1296$ способов.)**

9. Переместите цифры в равенстве 89 = 24 так, чтобы получилось верное равенство. **($8^2=64$)**

10. Медианы треугольника равны 1, 2 и *m*, а сумма длин его биссектрис равна *m*+3. Какие значения может принимать *m*? **(<u>Условие задачи некорректно, т.к. такой треугольник не существует</u>. По условию задачи следует, что сумма длин медиан равна сумме длин биссектрис, а такое возможно только в равностороннем треугольнике (у нас же неравносторонний треугольник в силу наличия двух различных (1 и 2) по длине медиан). Действительно, известно, что биссектриса расположена между высотой и медианой из этой же вершины, либо совпадает с ними (в случае равнобедренности). Докажем это. Если рассмотреть продолжение биссектрисы *AE* из вершины *A* треугольника *ABC*, где *AB*<*AC*, то она пересечёт описанную окружность треугольника в точке *P* – середине дуги *BC* (см. рисунок). Через эту же точку пройдёт серединный перпендикуляр *PM* к стороне *BC*, который при этом параллелен высоте *AH*. Тогда прямая *AE* будет секущей для этих двух параллельных прямых (*AH* и *PM*), значит, биссектриса *AE* пройдёт между высотой *AH* и медианой *AM*, т.е. *AH*<*AE*<*AM*. Таким образом, если в треугольнике *ABC* найдутся хотя бы две неравные стороны, то сумма длин биссектрис будет меньше суммы длин медиан.)**



11. На доске записаны числа: 4, 14, 24, … , 94, 104. Покажите, как стереть сначала одно число из записанных, потом стереть ещё два, потом – ещё три, и, наконец, стереть ещё четыре числа так, чтобы после каждого стирания сумма оставшихся на доске чисел делилась на 11. **(<u>Этого нельзя сделать</u>. Заметим, что одиннадцать записанных целых чисел составляют арифметическую прогрессию, поэтому их сумма делится на 11 (** $S = \dfrac{a_1 + a_{11}}{2}\cdot 11$***, при этом, числа a_1 и a_{11} имеют одинаковую чётность*****). Следовательно, для того, чтобы после первого стирания сумма оставшихся**

чисел делилась на 11, необходимо, чтобы стёртое число также делилось на 11. Кроме того, после четырёхкратного стирания останется одно число, которое опять-таки должно делиться на 11. Но среди записанных чисел есть только одно число, кратное одиннадцати, это число 44. Таким образом, последовательно выполнить указанные операции невозможно.)

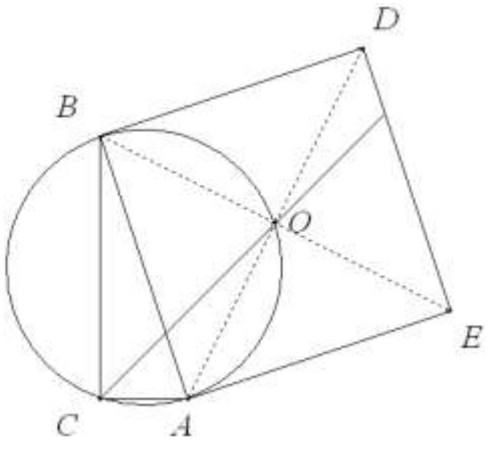
12. У сержанта в отделении 12 солдат разного роста. Он выстраивает их на плацу в две шеренги по 6 солдат так, что в каждой шеренге солдаты убывают по росту слева направо, а в передней шеренге каждый солдат ниже стоящего строго за ним солдата второй шеренги. Сколькими способами сержант может построить своё отделение с соблюдением требуемых условий? **(<u>132</u>. Фактически можно вести речь о движении по клетчатой плоскости ходами вниз и вправо на 1 клетку так, чтобы количество ходов вниз к каждому моменту времени превышало количество ходов вправо не более чем на 1. Ход вправо – поставить следующего по росту солдата в заднюю шеренгу правее уже стоящих, ход вниз – поставить следующего по росту солдата в переднюю шеренгу правее уже стоящих. Тогда надо подсчитать количество маршрутов из некоторой клетки (верхней левой) в клетку, расположенную на 5 ходов вправо и 6 ходов вниз в пределах ступенчатой доски (см. рис.). В каждую клетку надо писать число, равное сумме стоящих над ним выше и левее чисел, при этом в левой верхней клетке изначально записано число 1.)**

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6
	2	5	9	14	20
		5	14	28	48
			14	42	90
				42	132
					132

13. Камни лежат в трёх кучках: в одной – 51 камень, в другой – 49 камней, а в третьей – 5 камней. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку из чётного количества камней на две равные. Какое наименьшее количество камней может оказаться в одной кучке? **(<u>3 камня</u>. Если мы на первом шаге объединяем две первых кучки, то дальше в любой из получающихся кучек количество камней будет кратно 5, если объединяем первую и третью кучки – то кратно 7, если вторую и третью – то кратно 3. Значит, меньше 3 камней в кучке оказаться не могло. При этом существует пример, когда можно получить ровно кучку ровно из 3 камней.)**

14. Решите в целых числах уравнение $3x^2 + 10xy + 9y^2 = 23$. **(<u>Нет решений</u>. $3x^2+10xy+9y^2=2(x^2+4xy+4y^2)+(x^2+2xy+y^2)=2(x+2y)^2+(x+y)^2$, но число 23 нельзя представить в таком виде, что проверяется перебором малых значений точных квадратов (0, 1, 4, 9, 16).)**

15. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC, в котором $AC=1$ и $BC=3$, во внешнюю сторону построен квадрат $ABDE$. В каком отношении делит сторону DE биссектриса угла C, считая от точки D? **(<u>1:3</u>. Пусть O – центр данного квадрата. Поскольку из точек C и O отрезок AB виден под прямым углом, то эти точки лежат на окружности с диаметром AB . Из равенства хорд AO и BO следует равенство вписанных углов ACO и BCO , поэтому луч CO – биссектриса угла ACB . По свойству биссектрисы треугольника прямая CO делит сторону AB квадрата на отрезки, отношение которых равно отношению сторон AC и BC треугольника ABC , т.е. 1:3. Поскольку эта прямая проходит через центр квадрата, то она делит противоположную сторону DE в том же отношении.)**



16. Если $x=1^2+2^2+3^2+\ldots+2014^2$, а $y=1\times3+2\times4+3\times5+\ldots+2013\times2015$, то чему равно $x-y$?

(<u>2014</u>. Добавим в y ещё одно слагаемое 0×2. Тогда для каждого натурального n в пределах от 1 до 2014 получим разность $n^2-(n-1)\times(n+1)=1$, значит, всего будет сумма 2014-ти таких разностей.)