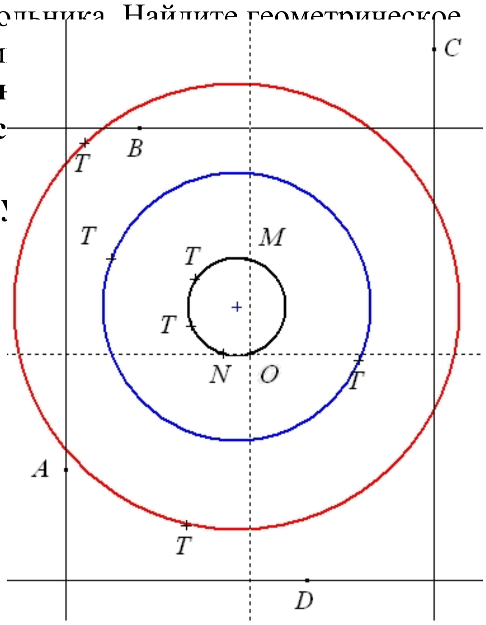
X Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». VII Турнир математических игр.
Математическая игра «Дуэль»*.* ***<u>Старшая лига (10-11 классы).</u>*** **<u>Решения</u>**. *12 сентября 2014 года*

1. Решите в положительных числах уравнение: $x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+4=2(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1})$ QUOTE $x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+4=2(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1})$. ($x=y=1+\sqrt{2}$**. Докажем, что выполняется неравенство** $x+\frac{1}{x}+2\geq 2\sqrt{2x+1}$ **QUOTE** $x+\frac{1}{x}+2\geq 2\sqrt{2x+1}$ **. При *x*>0 домножаем на *x*, возводим в квадрат, переносим в одну сторону и получаем, что** $(x^2-2x-1)^2\geq 0$**. Используя аналогичное неравенство для *y*, получаем** $x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+4\geq 2(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1})$ **QUOTE** $x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+4\geq 2(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1})$ **, причём равенство достигается только при** $x^2-2x-1=0$ **и** $y^2-2y-1=0$**. С учетом положительности получаем** $x=y=1+\sqrt{2}$ $x=y=1+\sqrt{2}$ **.)**

2. На плоскости даны четыре точки – вершины выпуклого четырёхугольника. Найдите геометрическое место центров прямоугольников, образуемых четырьмя прямым через данные точки. **(Предположим, что точки *A* и *C* лежат н прямоугольника. Пусть *M* и *N* – середины отрезков *AC* и *BD* с точку *M* прямую l_1, параллельную сторонам прямоугольника, а через точку *N* прямую l_2, параллельную сторонам прямо точки *B* и *D*. Пусть *O* – точка пересечения прямых l_1 и l_2. Ясно, что точка *O* лежит на окружности *S*, построенной на отрезке *MN* как на диаметре. С другой стороны, точка *O* является центром прямоугольника. Ясно, что прямоугольник можно построить для любой точки *O*, лежащей на окружности *S*, кроме двух точек *T*, в которых прямые *AC* и *BD* пересекают окружность, отличных от середин отрезков *AC* и *BD*. Остаётся заметить, что на противоположных сторонах прямоугольника могут лежать также точки *A* и *B*, *A* и *D*. Поэтому искомым ГМТ является <u>объединение трёх концентрических окружностей (без пар точек), построенных как на диаметрах на отрезках, соединяющих середины отрезков между парами вершин нашей четвёрки точек</u>.)**



3. Найдите три каких-нибудь решения уравнения $2^{2014}+2^{1014}+2^x=y^2$ в натуральных числах. *Ответ обосновать.* **(Представим левую часть в виде квадрата суммы двух чисел в разных вариантах, а именно: 1)** $(2^{1007}+2^{507})^2$**; 2)** $(2^{1007}+2^{x/2})^2$**; 3)** $(2^{507}+2^{x/2})^2$**. В первом случае** $2^x=2\cdot 2^{1514}\Leftrightarrow x=1515,\ y=2^{1007}+2^{507}$**. Во втором случае** $2^{1014}=2\cdot 2^{1007+x/2}\Leftrightarrow x=12,\ y=2^{1007}+2^6$**. В третьем случае** $2^{2014}=2\cdot 2^{507+x/2}\Leftrightarrow x=3012,\ y=2^{1506}+2^{507}$ **.)**

4. Расставьте на шахматной доске 4 ферзя, 4 слона и 4 короля так, чтобы ни одна из фигур не била никакую другую. **(Воспользуемся знаменитой центрально-симметричной расстановкой 8 ферзей, не бьющих друг друга. Поставим на их место по очереди слонов и ферзей так, чтобы все слоны оказались на краю. Теперь в углы поставим королей (см. рис.). Заметим также, что эта конструкция удовлетворяет методу пропеллера, но поворот относительно центра не на 90°, напрашивавшийся в силу количеств фигур, равных 4, а на 180°.)**

к			с				к
					ф		
							с
	ф						
						ф	
с							
		ф					
к				с			к

5. Приведите пример выпуклого четырёхугольника, любую вершину которого можно перенести в другую точку так, чтобы новый четырёхугольник был равен исходному. *Пример обоснуйте.* **(<u>Подойдёт равнобочная трапеция *ABCD* с углами 72° при большем основании *AD* и условием *AB=BC=CD*, которая есть часть правильного пятиугольника</u>**

***ABCDE*. Тогда любую вершину можно перенести в точку Е и вместе с тремя другими она будет давать такой же четырёхугольник.)**

6. Найдите какое-нибудь шестизначное число, десятичная запись которого не заканчивается нулями, которое при вычеркивании одной (не первой) цифры уменьшается в целое число раз. *Пример обоснуйте.* **(например, <u>180 625</u>:10625=17)**

7. Сколько существует семизначных чисел, в которых каждая цифра, кроме последней, делится на следующую за ней справа цифру? **(<u>218 чисел</u>. Рассмотрим все наборы различных цифр, удовлетворяющих условию (а цифры в наборе идут в невозрастающем порядке, при этом ещё нельзя использовать цифру 0): 1). Все цифры равны – 9 вариантов (кроме цифры 0). 2). Две различные цифры - 14 вариантов (2…1, 3…1, …, 9…1, 4…2, 6…2, 8…2, 6…3, 9…3, 8…4), в каждом из которых переход к другой цифре может быть в любом из шести промежутков среди семи цифр. Всего $14 \cdot 6$=84 числа. 3). Три различных цифры – 7 вариантов (4…2…1, 6…2…1, 8…2…1, 6…3…1, 9…3…1, 8…4…1, 8…4…2), в каждом из которых переход к новой цифре в двух промежутках из шести. Всего $7 \cdot C_6^2 = 7 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 105$ чисел. 4). Четыре различных цифры – 1 вариант (8…4…2…1). Всего $C_6^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$ чисел. Таким образом, условию задачи удовлетворяют 9+84+105+20=218 чисел.)**

8. Сколько различных по величине или по расположению прямоугольников, состоящих из целого числа клеток, можно начертить на шахматной доске 8×8? **(<u>1296</u>. <u>*Решение 1.*</u> Каждый прямоугольник определяется своими двумя противоположными вершинами, первую из которых можно выбрать из $81=9^2$ узлов решётки, вторую – среди $64=8^2$ узлов, не лежащих с первым выбранным узлом в одном горизонтальном или вертикальном ряду. Но заметим, что каждый прямоугольник нами был подсчитан 4 раза, т.к. первой вершиной могла быть выбрана любая из 4 вершин прямоугольника, а вторая вершина определялась однозначно – противоположная вершина прямоугольника. Значит, всего существует $81 \cdot 64/4=9^2 \cdot 4^2=36^2=1296$ прямоугольников. <u>*Решение 2.*</u> Каждый прямоугольник определяется парой вертикальных и парой горизонтальных линий сетки. Каждую такую пару можно выбрать $C_9^2 = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ способами. Значит, всего 36^2=1296 способов.)**

9. Все натуральные числа, не превосходящие составного натурального числа *n* и взаимно простые с *n*, выписали в строчку. После того, как последние два числа стерли, в строчке оказались все натуральные числа, не превосходящие некоторого натурального числа *m* и взаимно простые с *m*. Найдите все возможные варианты чисел *m* и *n*. **(<u>(4, 8), (4, 10), (6, 12), (12, 18), (18, 24), (48, 54)</u>. Простое число, меньшее *m*, является делителем *m* тогда и только тогда, когда оно является делителем *n*. В частности, *m* и *n* – одной чётности. Разберём три случая.**

1) n нечётно. Тогда стерты числа $n–1$ и $n–2$. Так как $(n–4, n)=1$, то $m>n–4$, т.е. $m=n–2$. Но $(n – 2, n) = 1$, т.е. (согласно вышеизложенному) m – простое число. Следовательно, все числа, меньшие n, взаимно просты с n, т.е. и n – простое число. Это противоречит условию.

2) n чётно и имеет простой делитель $p \geq m$. Тогда $n \geq 2p \geq 2m$. Так как взаимно простые с n числа расположены “симметрично” относительно , то $\varphi(n) = 4$. Перебрав все такие числа, находим единственную пару (4, 10).

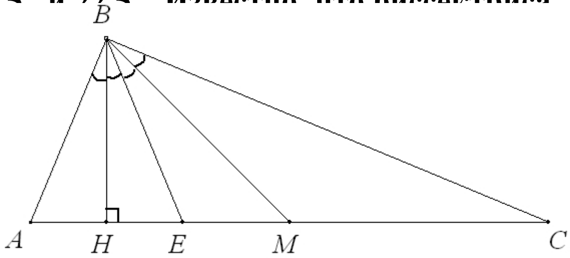
3) Число n чётно и все его простые делители меньше m. Тогда m и n (а значит, $n – m$) имеют одинаковые наборы простых делителей. Вычитая m из двух стертых чисел, мы получим полный набор чисел, не превосходящих $n–m$ и взаимно простых с $n–m$. Таким образом, $\varphi(n–m)=2$, т.е. $n – m$ равно 4 или 6. В первом случае m и n – степени двойки, и единственный вариант (4, 8).

Второй случай разбивается на два подслучая. а) $m = 6 \cdot 3^l$, $n = 6 \cdot 2^k$, $2^k – 3^l = 1$. $2^k – 1$ кратно 3 только при четном $k = 2i$. Но $2^i – 1$ и $2^i + 1$ одновременно являются степенями тройки только при $i = 1$. Получаем ещё одну пару (18, 24).

б) $m = 6 \cdot 2^k$, $n = 6 \cdot 3^l$, $3^l – 2^k = 1$. При $k = 1$, получаем пару (12, 18). $3^l – 1$ кратно 4 только при чётном $l = 2j$. $3^j – 1$ и $3^j + 1$ одновременно являются степенями двойки только при $j = 1$. Итак, последняя пара (48, 54).)

10. Найдите углы треугольника *ABC*, в котором высота *BH*, биссектриса *BE* и медиана *BM* делят угол

B на 4 равные части. (**<u>$\angle B$=90°, два других угла равны 67,5° и 22,5°</u>. Известно, что биссектриса лежит между высотой и медианой. Будем считать с точностью до симметрии, что H лежит между A и E. Пусть $\angle B=4\beta$, тогда из прямоугольных треугольников ABH и CBH находим, что $\angle BAH=90°-\beta$, $\angle BCH=90°-3\beta$. Из теоремы синусов для треугольников ABM и CBM находим, что $AM:BM=MC:BM=\sin3\beta:\sin(90°-\beta)=\sin\beta:\sin(90°-3\beta)$,**



откуда $\sin3\beta\cdot\cos3\beta=\sin\beta\cdot\cos\beta$ и $\sin6\beta=\sin2\beta$. Решая последнее уравнение, например, воспользовавшись формулой синуса тройного угла, получим, что $3\sin2\beta-4\sin^3 2\beta=\sin2\beta$, откуда либо $\sin2\beta=0$ (что невозможно), либо $\sin^2 2\beta=1/2$. Тогда с учётом $0<2\beta<90°$, получим, что $2\beta=45°$, откуда и находим все углы треугольника. В случае, когда H лежит между C и E рассуждения аналогичны.)

11. В квадратной таблице $n\times n$ записаны числа так, что сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце меньше 1. Укажите наименьшее k такое, что для любой таблицы всегда можно увеличить k чисел так, чтобы суммы чисел в строках и столбцах стали равными 1. (**<u>$k=2n-1$</u>. Рассмотрим произвольную клетку таблицы. Увеличим число в ней так, чтобы сумма в одном из содержащих ее рядов (строке или столбце) стала *равна* 1, а в другом – *не превысила* 1. Далее рассмотрим столбец и строку, суммы чисел в которых ещё *меньше* 1 (если такие есть), и поступим аналогично с числом, стоящим в клетке на их пересечении. И так далее. Не позже, чем после $2n-1$ "ходов" либо строчки, либо столбцы закончатся. Пусть, например, во всех строчках сумма стала равна 1. Так как в этот момент сумма чисел в каждом столбце не превосходит 1, а сумма всех чисел в таблице равна n, то сумма чисел в каждом столбце должна быть *равна* 1. Пример таблицы, которую нельзя довести до нужного состояния, увеличив менее чем $2n-1$ чисел: в каждой клетке верхней строки записано число $-n$, во все остальные клетки – нули. Все числа первого столбца, кроме верхнего, можно увеличивать не более, чем на 1. Но этого недостаточно, чтобы сумма чисел в первом столбце стала равной 1. Таким образом, нам придется увеличить верхнее число первого столбца. Аналогично доказывается, что придется увеличить каждое из чисел верхней строки. Кроме того, надо увеличить как минимум по одному числу в каждой из остальных строк.)**

12. У сержанта в отделении 12 солдат разного роста. Он выстраивает их на плацу в две шеренги по 6 солдат так, что в каждой шеренге солдаты убывают по росту слева направо, а в передней шеренге каждый солдат ниже стоящего строго за ним солдата второй шеренги. Сколькими способами сержант может построить своё отделение с соблюдением требуемых условий? (**<u>132</u>. Фактически можно вести речь о движении по клетчатой плоскости ходами вниз и вправо на 1 клетку так, чтобы количество ходов вниз к каждому моменту времени превышало количество ходов вправо не более чем на 1. Ход вправо – поставить следующего по росту солдата в заднюю шеренгу правее уже стоящих, ход вниз – поставить следующего по росту солдата в переднюю шеренгу правее уже стоящих. Тогда надо подсчитать количество маршрутов из некоторой клетки (верхней левой) в клетку, расположенную на 5 ходов вправо и 6 ходов вниз в пределах ступенчатой доски (см. рис.). В каждую клетку надо ставить число, равное сумме стоящих над ним выше и левее чисел, при этом в левой верхней клетке изначально стоит число 1.)**

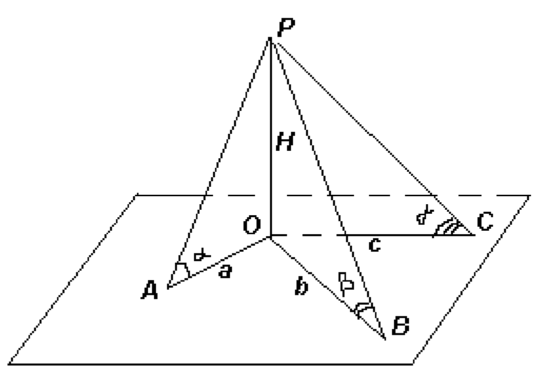
1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6
	2	5	9	14	20
		5	14	28	48
			14	42	90
				42	132
					132

13. Найдите наименьшее n, обладающее следующим свойством: если из 9 попарно незнакомых людей выбрать n пар, и людей в каждой паре сделать либо друзьями, либо врагами, то из всей группы гарантированно можно будет выбрать либо тройку попарных друзей, либо тройку попарных врагов. (**<u>n=33</u>. Существует контр-пример при n=32 и меньших значениях. Покажем, что при n=33 либо тройка попарных врагов, либо тройка попарных друзей обязательно найдётся. Предположим противное, то есть существует граф на 9 вершин с 33 (из 9·8/2=36 возможных) покрашенными в два цвета рёбрами, не содержащий одноцветных треугольников. Если степень каждой вершины этого графа не более 7, то всего рёбер будет не более чем [7·9/2]=31. Следовательно, найдётся вершина степени 8, – соединённая со всеми остальными (A).**

Предположим, из A выходят 5 одноцветных рёбер. Тогда 5 вершин, к которым они ведут, между собой могут быть соединены лишь рёбрами другого цвета, либо никак не соединены. Но из известной *теоремы Турана*, (утверждающей, что в графе на m вершинах наибольшее количество рёбер, которое можно провести так, чтобы не возникло цикла длины 3 равно $[m^2/4]$) получаем, что рёбер этого цвета между ними не более чем [5·5/4]=6, то есть по крайней мере 5·4/2 – 6=4 ребра между ними отсутствуют, а, значит, всего рёбер в графе не более 36-4=32, противоречие. Значит, из A выходят не более чем по 4 ребра каждого цвета. Тогда их ровно по 4. Рассмотрим 4 вершины, к которым ведут рёбра первого цвета. Понятно, что их соединяют либо рёбра второго цвета, либо ничего. Но, по *теореме Турана*, рёбер второго цвета между ними не более [4·4/4]=4, то есть по крайней мере 4·3/2 – 4=2 ребра между ними отсутствуют. Аналогично рассмотрев оставшиеся 4 вершины, к которым ведут рёбра второго цвета из A, мы получим, что и между ними отсутствуют по крайней мере 2 ребра. Следовательно, всего в графе не более 36-4=32 рёбер, что противоречит нашему предположению о том, что их 33. Итак, нужный нам граф с 33 рёбрами не существует, а потому n=33 является ответом.)

14. В мешке изюма содержится 2014 изюминок общим весом 1001 г, причём ни одна изюминка не весит больше $1+x$ г. При каком наибольшем значении x заведомо можно разложить весь изюм на две чаши весов так, чтобы они показали разность, не превосходящую 1 г? **(<u>При $x = 0{,}002$</u>. Изюминки, вес которых меньше 1 г, будем называть *лёгкими*, а остальные – *тяжёлыми*. Заметим, что $999\cdot 1{,}002 + 0{,}002 = 1001$ (*). Пусть $x > 0{,}002$. Возьмём 999 изюминок такого веса y, что $1{,}002 < y < 1 + x$ и $999y < 1001$. Остальные изюминки могут быть произвольны (с суммарным весом $1001 - 999y$). В силу нечётности количества тяжелых изюминок при любом разложении изюма на чашах весов на одной из чаш тяжелых изюминок будет больше. Тогда эта чаша более, чем на $1 + y - 0{,}002$ г тяжелее другой (из соотношения (*) следует, что суммарный вес легких изюминок меньше 0,002 г). Таким образом, разложить такой изюм с соблюдением условия не удастся. Пусть x=0,002. Докажем, что тогда изюм можно разложить с соблюдением условий задачи. Заметим, что тяжёлых изюминок не больше 1000. Разберём два случая. 1) Тяжёлых изюминок *чётное* число. Положим на каждую чашу половину тяжелых изюминок. При этом их веса отличаются не более, чем на $500\cdot 0{,}002 = 1$ г. Будем класть лёгкие изюминки по очереди каждый раз на более легкую чашу. Ясно, что на каждом (в том числе и на последнем) шаге, разность весов не превысит 1 г. 2) Тяжелых изюминок *нечётное* число (тогда их не больше 999). Будем их класть по очереди каждый раз на более лёгкую чашу. На каждом шаге разность весов не превысит 1,002 г. После того, как все тяжёлые изюминки “уложены”, будем класть легкие изюминки по очереди на более лёгкую чашу. Поскольку их суммарный вес не менее 0,002 г (это видно из (*)), то в какой-то момент разность весов чаш станет не больше 1 г, а при дальнейшем продолжении процесса это свойство сохранится.)**

15. Из точки, не лежащей в плоскости, проведены к этой плоскости перпендикуляр и три наклонные, проекции которых на данную плоскость равны a, b и c. Найдите длину перпендикуляра, если наклонные образуют с плоскостью углы, сумма которых равна 90°. ($\sqrt{\dfrac{abc}{a+b+c}}$**. Пусть PO – перпендикуляр к данной плоскости; PA, PB и PC – данные наклонные (см. рисунок). Тогда $OA = a$; $OB = b$; $OC = c$. Введём также обозначения: $PO = H$; $\angle PAO = \alpha$; $\angle PBO = \beta$; $\angle PCO = \gamma$. По условию $\alpha + \beta + \gamma = 90°$. Из прямоугольных треугольников POA, POB и POC получим:** $tg\alpha = \dfrac{H}{a}$; $tg\beta = \dfrac{H}{b}$; $tg\gamma = \dfrac{H}{c}$. **Кроме того,**



$tg\gamma = tg\left(90^\circ - (\alpha+\beta)\right) = ctg\left(\alpha+\beta\right) = \dfrac{1}{tg\left(\alpha+\beta\right)} = \dfrac{1 - tg\alpha\cdot tg\beta}{tg\alpha + tg\beta}$. **Подставив значение тангенсов,**

получим уравнение: $\dfrac{H}{c}=\dfrac{1-\dfrac{H^2}{ab}}{\dfrac{H}{a}+\dfrac{H}{b}}$**. Его решение:** $H=\sqrt{\dfrac{abc}{a+b+c}}$**.)**

16. Дано множество $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2014\}$. Сколькими способами можно из этого множества выбрать подмножество B такое, что если сумма каких-то двух различных чисел из A − степень двойки, то ровно одно из этих чисел лежит в B? **(<u>2^{11}=2048</u>. Разобьём числа от 1 до 2014 на 11 групп $G_0, \ldots, G_{10}$, где в группу G_k входят все числа, делящиеся на 2^k, но не делящиеся на 2^{k+1}. Числа из разных групп в сумме не могут давать степень двойки, поэтому, мы можем независимо покрасить числа в каждой группе. Докажем методом математической индукции, что нечётные числа (группу G_0) можно покрасить двумя способами, для остальных групп аналогично можно рассуждать с нечётностью за счёт выноса общего множителя − степени двойки. покраски. Фактически мы докажем, что граф нечётных чисел, где ребро означает сумму, равную степени двойки, является двудольным (числа с остатком 1 при делении на 4 попадают в одну долю, а числа с остатком 3 − в другую долю). Мы докажем, что цвет 1 («взято» или «не взято» число в B) однозначно определяет цвета всех остальных нечётных чисел. Пусть это верно для нечётных чисел, меньших 2^m (этот факт очевиден для m=2, т.к. 1 и 3 − разного цвета). Рассмотрим любое нечётное число t от 2^m+1 до $2^{m+1}-1$. Тогда $2^{m+1}-t$ − нечетное число, меньшее 2^m, цвет которого уже определён, следовательно, цвет t также однозначно задан − он отличается от цвета $2^{m+1}-t$. Итак, каждую из групп $G_0, \ldots, G_{10}$ мы можем покрасить двумя способами, покраски разных групп независимы, следовательно, всего есть 2^{11} вариантов.)**