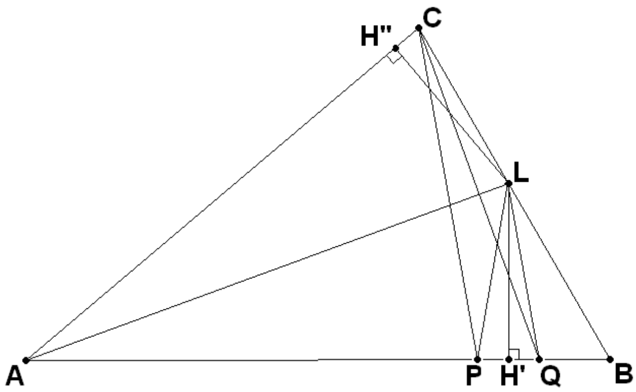
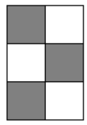
V Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». Турнир математических игр.
Математическая игра «2 капитана». («Бороться и искать, найти и не сдаваться»).
<u>Младшая лига</u>. <u>Решения</u>. 10 сентября 2009 года

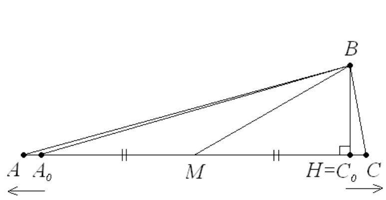


1. **(устно)** В ΔABC $\angle A=40°$, $\angle B=60°$, $\angle C=80°$, AL - биссектриса. На стороне AB нашлись такие две точки P и Q, что $LP=LQ=LC$, причем $PB>QB$. Докажите, что CQ – биссектриса $\angle PCB$. **(Пусть H' и H'' – проекции L на AB и AC соответственно, тогда $LH'=LH''$. Тогда прямоугольные треугольники $\Delta LPH'$ и $\Delta LH''C$ равны по признаку равенства ($LH'=LH''$, $LP = LC$) . Отсюда $\angle H''LC=\angle PLH'= 90°-\angle H''CL=90°-80°=10°$. LH' – высота, значит, и биссектриса в равнобедренном ΔPLQ, т.е. $\angle PLQ=2\angle PLH'=20°$. Тогда $\angle PQL= 90°-\angle H'LQ=80°$. При этом $\angle PQL$ - внешний для ΔQLB, т.е. $\angle QLB=\angle PQL-\angle QBL= 80°-60°=20°$. Он, в свою очередь – внешний для равнобедренного ΔCLQ. Отсюда $\angle QCL=10°$. $\angle PLB=\angle PLQ+\angle QLB=40°$ и внешний для равнобедренного ΔCLP, значит, $\angle PCB=20°$, откуда и следует, что CQ – биссектриса $\angle PCB$.)**
2. **(письменно)** Какое наибольшее количество различных натуральных чисел можно взять так, чтобы сумма любых трёх из них являлась простым числом? **(4 числа, например, 1, 3, 7, 9 дают простые числа 11, 13, 17 и 19. Если бы чисел было не менее 5, то среди них либо нашлись три числа с разными остатками (0, 1 и 2) при делении на 3, либо три числа с одинаковым остатком, тогда сумма этих трёх чисел делилась бы на 3 и была больше 3, т.е. не являлась бы простым числом.)**
3. **(письменно)** Какое наибольшее количество пешек (белых и чёрных) можно поставить на шахматную доску так, чтобы ни одна из пешек не била никакую другую (в том числе и своего цвета)? *(Белые пешки бьют по диагонали вверх, а чёрные – по диагонали вниз на одну клетку. На нижней и верхней горизонталях пешки ставить можно.)* **(48 пешек. Выделим на доске прямоугольник из 6 первых строк, разобьём его на 8 вертикально расположенных прямоугольников 3×2, каждый из которых в свою очередь разобьём на две тройки клеток одного цвета при шахматной раскраске, идущих по диагонали уголком (см. рис.). Если в центре такой тройки стоит пешка, то в зависимости от её цвета либо снизу, либо сверху нет пешки. Значит, в такой тройке есть свободная клетка, тогда в прямоугольнике 3×2 есть хотя бы 2 свободные клетки, а в прямоугольнике 6×8 найдутся хотя бы 2·8=16 свободных клеток, т.е. на доске не более 64–16=48 занятых клеток. Пример на 48 пешек – на рисунке, где последовательно идут сверху вниз ряды из белых, чёрных пешек и пустые ряды.)**



б	б	б	б	б	б	б	б
ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч
б	б	б	б	б	б	б	б
ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч
б	б	б	б	б	б	б	б
ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч

4. **(письменно)** Сёла A, B, C, D и E расположены друг за другом по шоссе на расстоянии 5 км друг от друга. Автобус курсирует по шоссе от села A до села E и обратно. Автобус расходует 20 литров топлива на каждые 100 километров. В каком селе кончится топливо у автобуса, если изначально в его баке было 125 литров? **(D. На каждые 5 км автобус тратит 1 литр топлива, значит, он проедет 125 пятикилометровых промежутков между сёлами, причём каждый круговой маршрут от A до A содержит ровно 8 промежутков. Следовательно, автобус проедет [125:8]=15 полных кругов и ещё 125-15·8=5 промежутков, последний из которых закончится в D при возвращении из E.)**
5. **(ответ)** Найдите наименьшее натуральное число, имеющее ровно 2009 различных натуральных делителей. **($2^{40}\cdot 3^6\cdot 5^6$, что следует из формулы количества делителей)**
6. **(письменно)** Существует ли равнобедренный треугольник, в котором медиана и высота, проведённые из одной вершины отличаются по длине в два раза? **(Существует. Построим сначала прямоугольный треугольник A_0BC_0, в котором медиана BM, проведённая к катету A_0C_0, в 2 раза больше катета BC_0. После этого начнём относительно точки M раздвигать на равные расстояния вершины A и C до положения, когда $\angle ABC$ станет равен $\angle ACB$. Этот момент наступит, т.к. $\angle ABC$ будет непрерывно увеличиваться с угла, меньшего 90°, а $\angle ACB$ будет непрерывно уменьшаться с угла в 90°. Тогда медиана BM равнобедренного треугольника ABC будет в два раза больше высоты $BH=BC_0$.)**



7. **(ответ)** В ряд без запятых пишутся числа $1N2(N–1)3(N–2)4(N–3)\ldots$ (пока не будут выписаны все натуральные числа от 1 до N по разу). При каком наименьшем N в таком ряду встретится кусок 2009? **(207. Для 207 есть пример. Проверим, может ли N быть меньше. Так как числа с 0 не начинаются, то в ряду должно встретиться число 200, а после него идёт число, начинающееся на 9, значит, перед числом 200 есть числа 1, 2, …, 8, а между ними семь чисел, больших 200. Итак, $N \geq 207$.)**

8. **(устно)** В однокруговом футбольном турнире участвовало 6 команд. За победу даётся 3 очка, за ничью – 1, за проигрыш – 0. Команды набрали соответственно 13, 10, 7, 5, 3 и 2 очка. Сколько матчей закончилось вничью? **(5 ничьих. Всего команды набрали в сумме 40 очков в** $C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ **сыгранных матчах, а каждая ничья даёт потерю командами в сумме 1 очка из максимально возможных 3·15=45 очков. Значит, всего было 45–40=5 ничьих.)**

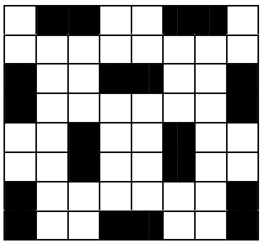
9. **(ответ+пример)** В клетках квадрата 3×3 расставляются все натуральные числа от 1 до 9 и для каждого квадрата 2×2 подсчитывается произведение чисел. Какое наибольшее значение может принимать НОД этих четырёх произведений? Приведите ответ и пример расстановки чисел. **(216, например, в случае расположения чисел, как на рисунке. Доказать оценку можно перебором расположения чисел, кратных 2, 3, 5 и 7)**

2	**4**	**1**
3	**9**	**6**
7	**8**	**5**

10. **(устно)** Каждый из трёх приятелей либо всегда говорит правду, либо всегда лжёт. Им был задан вопрос: «Есть ли хотя бы один лжец среди двух остальных?» Первый ответил: «Нет», второй ответил: «Да», а третий - промолчал. Кто в этой компании является лжецом? **(Первый и третий. Т.к. первый и второй приятели дали различные ответы, то один из них – лжец, а другой – рыцарь, говорящий правду. Кроме того, рыцарь не мог ответить «Нет» на предложенный ему вопрос, так как в этом случае он бы сказал неправду (среди двух оставшихся точно есть лжец). Следовательно, первый – лжец. Он солгал, значит, среди двух оставшихся должен быть лжец, и им может быть только третий приятель.)**

11. **(устно)** В совете футбольной федерации 20 человек. Каждое заседание начинается с того, что члены совета, которых более половины присутствующих считают некомпетентными, изгоняются навсегда. Через какое наибольшее количество заседаний совет федерации гарантированно стабилизируется? (**10. Заметим, что на первом заседании будут исключены все члены совета, у которых не менее 11 оппонентов, считающих их некомпетентными, после этого будут изгоняться имеющие противников среди остающихся хотя бы на 1 меньше, чем изгнанные в прошлый раз, пока процесс не остановится. На это уйдёт не более 10 заседаний, т.к. имеющие не более 1 оппонента с плохим мнением о себе среди оставшихся на данный момент исключёнными из совета быть не могут. При этом в качестве примера ровно на 10 таких заседаний подойдёт следующий. Пронумеруем членов совета номерами 1, 2, …, 20 и пусть они считают других некомпетентными таким образом, что на первом заседании вылетает №20, имеющий 11 недоверий от людей с меньшими номерами, затем №18 и №19 с 10 недовериями, №16 и №17 (9 недоверий), …, №4 и №5 (3 недоверия), №3 (2 недоверия).)**

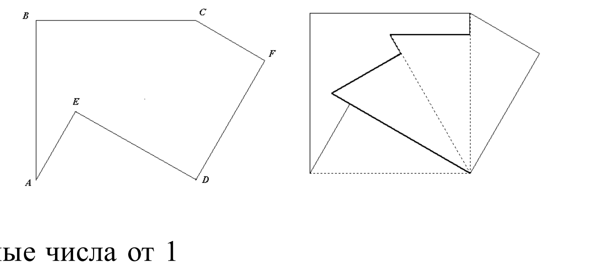
12. **(письменно)** Каждая клетка доски 8×8 покрашена в чёрный или белый цвет. За один ход перекрашиваются в противоположный цвет все клетки, имеющие чётное количество чёрных соседних (по стороне) клеток, и остаются окрашенными в прежний цвет все клетки, имеющие нечётное количество чёрных соседних (по стороне) клеток. Существует ли раскраска доски, которая остаётся неизменной? **(существует, например, см. рисунок)**



13. **(письменно)** Наибольший угол остроугольного треугольника в пять раз больше наименьшего. Найдите углы этого треугольника, если известно, что все они выражаются целым числом градусов. **(17°, 78° и 85°. Пусть** α **- наименьший угол, тогда в силу остроугольности** $5\alpha<90°$**, значит,** $\alpha<18°$**. С другой стороны сумма всех углов треугольника не больше** $\alpha+5\alpha+5\alpha$**, значит,** $11\alpha\geq180°$**, т.е.** $\alpha>16°$**. В силу целочисленности получаем, что** $\alpha=17°$**, откуда другие углы треугольника равны 85° и 78°.)**

14. **(ответ)** Чернопольный «слонёнок» может бить только соседнюю по диагонали клетку. Сколькими способами можно расставить на чёрных клетках шахматной доски наибольшее количество не бьющих друг друга чернопольных «слонят»? **(**$70=1+4^2+6^2+4^2+1$**. Например, можно разобрать случаи, сдвигая по очереди слонят, стоящих на главной чёрной диагонали, учитывая, что всего будет 16 слонят и каждый занимает свою пару соседних чёрных клеток по диагонали.)**

15. **(пример)** Из квадрата *ABCD* вырезали прямоугольный треугольник *ADE* с $\angle ADE=30^{\circ}$ и приставили его гипотенузой к стороне *CD* так, что получился шестиугольник *ABCFDE* с $\angle EDF=90^{\circ}$ (см.рис.). Разрежьте его на два невыпуклых многоугольника, из которых опять можно составить квадрат. **(решение связано с идеей поворотов на 30**$^{\circ}$ **маленького выступающего треугольника.)**



16. **(письменно)** В вершинах куба расставляют по одному все целые числа от 1 до 8, а после этого сообщают сумму чисел на каждом ребре (про каждое ребро известно, какая на нём сумма). Верно ли, что по этим 12 суммам можно однозначно восстановить расстановку чисел в вершинах куба? **(нет, на рисунке приведёны два примера расстановки чисел с одинаковым набором сумм)**