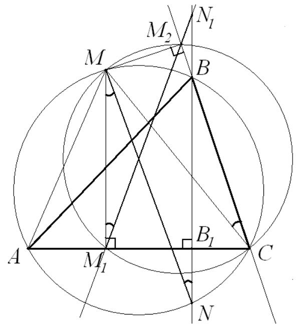
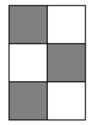
V Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». Турнир математических игр.
Математическая игра «2 капитана». («Бороться и искать, найти и не сдаваться»).
Старшая лига*. Решения. *10 сентября 2009 года

1. **(устно)** На дуге AB описанной около остроугольного треугольника ABC окружности взята точка M, проекциями которой на прямые AC и BC будут точки M_1 и M_2 соответственно. Прямая, содержащая высоту BB_1 треугольника ABC, пересекает дугу AC и прямую M_1M_2 в точках N и N_1 соответственно. Докажите, что $MN=M_1N_1$. ***(по мотивам задач о прямой Симсона)*** **($\angle MM_1C=\angle MM_2C=90°$, значит, точки M, M_1, C и M_2 лежат на одной окружности с диаметром MC и тогда $\angle MM_1M_2=\angle MCM_2$, как опирающиеся на одну дугу. $\angle MNB=\angle MCB$, как опирающиеся на одну дугу MB описанной окружности треугольника ABC. Т.о. $\angle MM_1N_1=\angle MM_1M_2=\angle MCM_2=\angle MCB=\angle MNB=\angle M_1MN$ (два последних угла являются накрест лежащими при параллельных прямых MM_1 и NN_1, которые перпендикулярны AC), значит, MM_1NN_1 – трапеция с равными углами между основаниями и диагоналями, т.е. является равнобедренной, а её диагонали MN и M_1N_1 равны между собой.)**



2. **(письменно)** Найдите целую часть числа $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6}}}}$, где в левой части 2009 двоек и 2009 шестёрок. **(4. По индукции докажем, что первый корень при любом количестве двоек меньше 2, а второй – меньше 3, тогда их сумма меньше 5. При этом с увеличением количества цифр под корнями сумма растёт и уже при двух цифрах будет больше 4.)**

3. **(письменно)** Какое наибольшее количество пешек (белых и чёрных) можно поставить на шахматную доску 8×8 так, чтобы ни одна из пешек не била никакую другую (в том числе и своего цвета)? Приведите ответ и пример. *(Белые пешки бьют по диагонали вверх, а чёрные – по диагонали вниз на одну клетку. На нижней и верхней горизонталях пешки ставить можно.)* **(48 пешек. Выделим на доске прямоугольник из 6 первых строк, разобьём его на 8 вертикально расположенных прямоугольников 3×2, каждый из которых в свою очередь разобьём на две тройки клеток одного цвета при шахматной раскраске, идущих по диагонали уголком (см. рис.). Если в центре такой тройки стоит пешка, то в зависимости от её цвета либо снизу, либо сверху нет пешки. Значит, в такой тройке есть свободная клетка, тогда в прямоугольнике 3×2 есть хотя бы 2 свободные клетки, а в прямоугольнике 6×8 найдутся хотя бы 2·8=16 свободных клеток, т.е. на доске не более 64–16=48 занятых клеток. Пример на 48 пешек – на рисунке, где последовательно идут сверху вниз ряды из белых, чёрных пешек и пустые ряды.)**

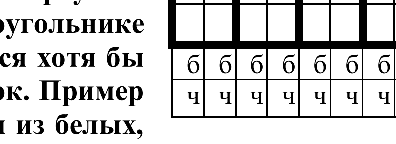


б	б	б	б	б	б	б	б
ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч
б	б	б	б	б	б	б	б
ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч
б	б	б	б	б	б	б	б
ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч

4. **(письменно)** Верно ли, что сумма $\frac{a+c}{a+b}+\frac{b+d}{b+c}+\frac{c+a}{c+d}+\frac{d+b}{d+a}$ при положительных числах a, b, c, d принимает наименьшее значение только тогда, когда они равны между собой? **(Неверно. Поскольку $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}$ для положительных x и y, то $\frac{a+c}{a+b}+\frac{b+d}{b+c}+\frac{c+a}{c+d}+\frac{d+b}{d+a}$ = $(a+c)\cdot\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+d}\right)$ + $(b+d)\times$ $\times\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{d+a}\right)$ ≥ $(a+c)\frac{4}{a+b+c+d}$ + $(b+d)\frac{4}{a+b+c+d}$ = 4. При этом значение 4 достигается, если $a+b=c+d$ и $b+c=d+a$. Сложив эти равенства, получим, что $b=d$, $a=c$. Но эти пары чисел могут быть разными, например, $a=c=1$, $b=d=2$, значит, утверждение о равенстве всех чисел не является верным.)**

5. **(ответ)** Найдите наименьшее натуральное число, имеющее ровно 2009 различных натуральных делителей. **($2^{40}\cdot3^6\cdot5^6$, что следует из формулы количества делителей)**

6. **(письменно)** Существует ли равнобедренный треугольник, в котором медиана и высота, проведённые из одной вершины отличаются по длине в два раза? **(Существует. Построим сначала прямоугольный треугольник A_0BC_0, в котором медиана BM, проведённая к катету A_0C_0, в 2 раза больше катета BC_0. После этого начнём относительно точки M раздвигать на равные расстояния вершины A и C до положения, когда $\angle ABC$ станет равен $\angle ACB$. Этот момент наступит, т.к. $\angle ABC$ будет непрерывно увеличиваться с угла, меньшего 90°, а $\angle ACB$ будет непрерывно уменьшаться с угла в 90°. Тогда медиана BM равнобедренного треугольника ABC будет в два раза больше высоты $BH=BC_0$.)**



7. **(ответ)** Найдите все функции $f\colon Z\to Z$ такие, что для любых целых чисел x и y выполнено равенство $f(f(x)+y+1)=x+f(y)+1$. **($f(x)=x$ и $f(x)=-x-2$. Фиксируем y. Получим линейную функцию от x, принимающую все целочисленные значения. Пусть $f(a)=-1$. Полагая $x=a$, получим $f(y)=a+f(y)+1$, откуда $a=-1$. Пусть $f(b)=0$. Полагая $x=b$, получим $f(y+1)=f(y)+b+1$, откуда $b+1=\pm1$, иначе функция не будет принимать всех целочисленных значений. Отсюда и получаются два приведённых выше ответа. Проверка показывает, что они подходят.)**

8. **(устно)** Найдите сумму всех натуральных чисел, в десятичных записях которых цифры (их не менее двух) образуют либо строго возрастающую, либо строго убывающую последовательность.

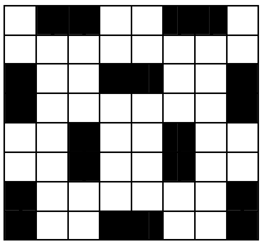
9. **(ответ+пример)** В клетках квадрата 3×3 расставляются все натуральные числа от 1 до 9 и для каждого квадрата 2×2 подсчитывается произведение чисел. Какое наибольшее значение может принимать НОД этих четырёх произведений? Приведите ответ и пример расстановки чисел. **(216, например, в случае расположения чисел, как на рисунке. Доказать оценку можно перебором расположения чисел, кратных 2, 3, 5 и 7)**

2	**4**	**1**
3	**9**	**6**
7	**8**	**5**

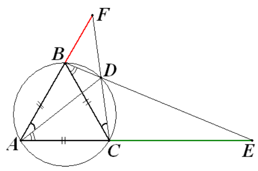
10. **(устно)** Найдите такую бесконечную непостоянную арифметическую прогрессию из натуральных чисел, что никакой её член не является ни суммой двух квадратов, ни суммой двух кубов натуральных чисел. **(Например, $a_n=9n+3$. Действительно, сумма двух квадратов делится на 3 только тогда, когда оба слагаемых делятся на 3, а значит, и на 9. Нетрудно проверить, что куб при делении на 9 может давать остаток 0, 1 или 8. Поэтому сумма двух кубов не может при делении на 9 давать остаток 3.)**

11. **(устно)** В совете футбольной федерации 20 человек. Каждое заседание начинается с того, что члены совета, которых более половины присутствующих считают некомпетентными, изгоняются навсегда. Через какое наибольшее количество заседаний совет федерации гарантированно стабилизируется? (**10. Заметим, что на первом заседании будут исключены все члены совета, у которых не менее 11 оппонентов, считающих их некомпетентными, после этого будут изгоняться имеющие противников среди остающихся хотя бы на 1 меньше, чем изгнанные в прошлый раз, пока процесс не остановится. На это уйдёт не более 10 заседаний, т.к. имеющие не более 1 оппонента с плохим мнением о себе среди оставшихся на данный момент исключёнными из совета быть не могут. При этом в качестве примера ровно на 10 таких заседаний подойдёт следующий. Пронумеруем членов совета номерами 1, 2, …, 20 и пусть они считают других некомпетентными таким образом, что на первом заседании вылетает №20, имеющий 11 недоверий от людей с меньшими номерами, затем №18 и №19 с 10 недовериями, №16 и №17 (9 недоверий), …, №4 и №5 (3 недоверия), №3 (2 недоверия).)**

12. **(письменно)** Каждая клетка доски 8×8 покрашена в чёрный или белый цвет. За один ход перекрашиваются в противоположный цвет все клетки, имеющие чётное количество чёрных соседних (по стороне) клеток, и остаются окрашенными в прежний цвет все клетки, имеющие нечётное количество чёрных соседних (по стороне) клеток. Существует ли раскраска доски, которая остаётся неизменной? **(существует, например, см. рисунок)**

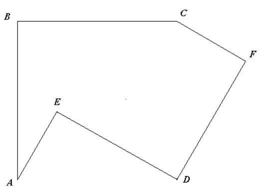


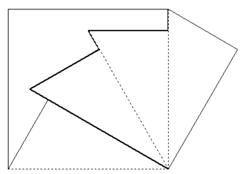
13. **(письменно)** На малой дуге BC окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC, взята точка D. Прямые BD и CD пересекаются с прямыми AC и AB в точках E и F соответственно. Докажите, что $BF+CE\geq AB+AC$. **(Заметим, что $\angle FCB+\angle CFB=\angle CBA$ (внешний угол)=60°, $\angle CBE+\angle CEB=\angle ACB$ (внешний угол)=60° и $\angle DCB+\angle CBD=\angle CAB=60°$ (опираются в сумме на одну дугу), значит, $\angle FCB=\angle CEB$ и $\angle CFB=\angle CBE$. Тогда треугольники CBF и CBE подобны, откуда получим $\frac{BF}{BC}=\frac{BC}{CE}$. Воспользовавшись этим равенством и неравенством Коши, получим, что $\frac{BF}{BC}+\frac{CE}{BC}\geq 2\sqrt{\frac{BF}{BC}\cdot\frac{CE}{BC}}=2$. Тогда** $BF+CE\geq 2\cdot BC=AB+AC$.)



14. **(ответ)** Чернопольный «слонёнок» может бить только соседнюю по диагонали клетку. Сколькими способами можно расставить на чёрных клетках шахматной доски наибольшее количество не бьющих друг друга чернопольных «слонят»? **($70=1+4^2+6^2+4^2+1$. Например, можно разобрать случаи, сдвигая по очереди слонят, стоящих на главной чёрной диагонали, учитывая, что всего будет 16 слонят и каждый занимает свою пару соседних чёрных клеток по диагонали.)**

15. **(пример)** Из квадрата $ABCD$ вырезали прямоугольный треугольник ADE с $\angle ADE=30^{o}$ и приставили его гипотенузой к стороне CD так, что получился шестиугольник $ABCFDE$ с $\angle EDF=90^{o}$ (см.рис.). Разрежьте его на два невыпуклых многоугольника, из которых опять можно составить квадрат. **(решение связано с идеей поворотов на 30^{o} маленького выступающего треугольника.)**





16. **(письменно)** В вершинах куба расставляют по одному все целые числа от 1 до 8, а после этого сообщают сумму чисел на каждом ребре (про каждое ребро известно, какая на нём сумма). Верно ли, что по этим 12 суммам можно однозначно восстановить расстановку чисел в вершинах куба? **(нет, на рисунке приведены два примера расстановки чисел с одинаковым набором сумм)**