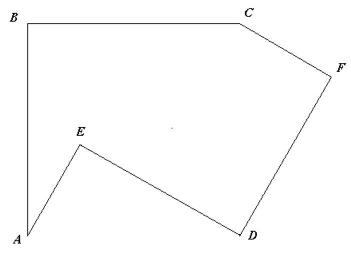
V Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». Турнир математических игр.
Математическая игра «2 капитана». («Бороться и искать, найти и не сдаваться»).
Младшая лига. 10 сентября 2009 года

1. **(устно)** В ΔABC $\angle A=40°$, $\angle B=60°$, $\angle C=80°$, AL - биссектриса. На стороне AB нашлись такие две точки P и Q, что $LP=LQ=LC$, причем $PB>QB$. Докажите, что CQ – биссектриса $\angle PCB$.
2. **(письменно)** Какое наибольшее количество различных натуральных чисел можно взять так, чтобы сумма любых трёх из них являлась простым числом?
3. **(письменно)** Какое наибольшее количество пешек (белых и чёрных) можно поставить на шахматную доску так, чтобы ни одна из пешек не била никакую другую (в том числе и своего цвета)? *(Белые пешки бьют по диагонали вверх, а чёрные – по диагонали вниз на одну клетку. На нижней и верхней горизонталях пешки ставить можно.)*
4. **(письменно)** Сёла A, B, C, D и E расположены друг за другом по шоссе на расстоянии 5 км друг от друга. Автобус курсирует по шоссе от села A до села E и обратно. Автобус расходует 20 литров топлива на каждые 100 километров. В каком селе кончится топливо у автобуса, если изначально в его баке было 125 литров?
5. **(ответ)** Найдите наименьшее натуральное число, имеющее ровно 2009 различных натуральных делителей.
6. **(письменно)** Существует ли равнобедренный треугольник, в котором медиана и высота, проведённые из одной вершины отличаются по длине в два раза?
7. **(ответ)** В ряд без запятых пишутся числа $1N2(N-1)3(N-2)4(N-3)\ldots$ (пока не будут выписаны все натуральные числа от 1 до N по разу). При каком наименьшем N в таком ряду встретится кусок 2009?
8. **(устно)** В однокруговом футбольном турнире участвовало 6 команд. За победу даётся 3 очка, за ничью – 1, за проигрыш – 0. Команды набрали соответственно 13, 10, 7, 5, 3 и 2 очка. Сколько матчей закончилось вничью?
9. **(ответ+пример)** В клетках квадрата 3×3 расставляются все натуральные числа от 1 до 9 и для каждого квадрата 2×2 подсчитывается произведение чисел. Какое наибольшее значение может принимать НОД этих четырёх произведений? Приведите ответ и пример расстановки чисел.
10. **(устно)** Каждый из трёх приятелей либо всегда говорит правду, либо всегда лжёт. Им был задан вопрос: «Есть ли хотя бы один лжец среди двух остальных?» Первый ответил: «Нет», второй ответил: «Да», а третий - промолчал. Кто в этой компании является лжецом?
11. **(устно)** В совете футбольной федерации 20 человек. Каждое заседание начинается с того, что члены совета, которых более половины присутствующих считают некомпетентными, изгоняются навсегда. Через какое наибольшее количество заседаний совет федерации гарантированно стабилизируется?
12. **(письменно)** Каждая клетка доски 8×8 покрашена в чёрный или белый цвет. За один ход перекрашиваются в противоположный цвет все клетки, имеющие чётное количество чёрных соседних (по стороне) клеток, и остаются окрашенными в прежний цвет все клетки, имеющие нечётное количество чёрных соседних (по стороне) клеток. Существует ли раскраска доски, которая остаётся неизменной?
13. **(письменно)** Наибольший угол остроугольного треугольника в пять раз больше наименьшего. Найдите углы этого треугольника, если известно, что все они выражаются целым числом градусов.
14. **(ответ)** Чернопольный «слонёнок» может бить только соседнюю по диагонали клетку. Сколькими способами можно расставить на чёрных клетках шахматной доски наибольшее количество не бьющих друг друга чернопольных «слонят»?
15. **(пример)** Из квадрата $ABCD$ вырезали прямоугольный треугольник ADE с $\angle ADE=30°$ и приставили его гипотенузой к стороне CD так, что получился шестиугольник $ABCFDE$ с $\angle EDF=90°$ (см.рис.). Разрежьте его на два невыпуклых многоугольника, из которых опять можно составить квадрат.



16. **(письменно)** В вершинах куба расставляют по одному все целые числа от 1 до 8, а после этого сообщают сумму чисел на каждом ребре (про каждое ребро известно, какая на нём сумма). Верно ли, что по этим 12 суммам можно однозначно восстановить расстановку чисел в вершинах куба?