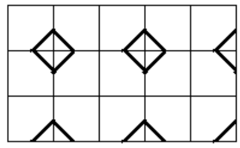


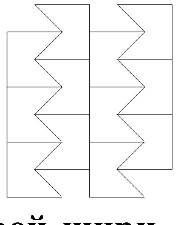
0–0. Клетчатый прямоугольник 10×12 согнули по линиям сетки несколько раз так, что получился квадрат 1×1. Сколько частей могло получиться после того, как этот квадрат разрезали по отрезку, соединяющему середины двух его соседних сторон? **(43, 37, 36 или 31. В каждой клетке будет сделан ровно один разрез, а по разрезу в одной клетке однозначно определяется, как разрезаны остальные клетки. У нас получится разрезание вида, указанного на чертеже, а в зависимости от расположения вырезанных маленьких квадратиков и получится количество частей (6·7+1=43, 6·6+1=37, 5·7+1=36, 5·6+1=31).)**

0–1. Сколькими способами можно разменять 8 рублей более мелкими монетами, если есть монеты в 1, 2 и 5 рублей? **(7 способов – два способа, когда можно взять 5-рублёвую монету, и ещё 5 способов без неё, когда количество 2-рублёвых монет может быть от 0 до 4 штук)**

0–2. Теннисный турнир с 20 участниками продолжался три дня. В каждый из трёх дней каждый участник сыграл один матч. В итоге у турнира оказался единственный победитель, но никто не проиграл все три свои матча. Сколько человек выиграли ровно по два матча? **(8 теннисистов выиграли по 2 матча. Всего сыграно 3·20/2=30 матчей. Три матча выиграны победителем, остальные 27 матчей выиграны 19 игроками, каждый из которых выиграл хотя бы 1 матч. Значит, 27–19=8 игроков выиграли по 2 матча, остальные 19–8=11 теннисистов выиграли по 1 матчу.)**

0–3. В коробке лежат шары 100 разных цветов: 1 шар первого цвета, 2 - второго, ..., 100 шаров сотого цвета. Сколько существует способов разложить их по 100 мешкам так, чтобы в первом мешке был один шар, во втором - два, и т.д., и чтобы в каждом мешке все шары были разных цветов? (Шары одного цвета неразличимы.) **(1 способ. В последний (100-й) мешок надо положить шары всех 100 цветов, тогда остаются шары 99 цветов: 1 – второго, 2 – третьего, …, 99 – сотого цвета. И т.д. методом спуска однозначно заполняем 99-й, 98-й, …, 1-й мешки.)**

0–4. Какие целые значения может принимать среднее арифметическое четырёх различных натуральных чисел первой сотни? **(Любое целое значение от 3 до 98. Заметим, что среднее арифметическое будет не меньше (1+2+3+4)/4=2,5 и не больше (97+98+99+100)/4=98,5. При этом любое целое значение *N* в пределах от 3 до 98 можно получить как среднее арифметическое четвёрки чисел (*N*–2, *N*–1, *N*+1, *N*+2).)**



0–5. Покройте без наложений плоскость одинаковыми невыпуклыми пятиугольниками. **(например, разобьём плоскость на полосы одинаковой ширины, а каждую из них – на равные пятиугольные «флажки»)**

0–6. Найдите наибольшее натуральное число из различных цифр такое, что любое число из его шести подряд идущих цифр делится на 6. **(9753186420, т.к. все цифры, начиная с шестой, должны быть чётными, а данное число является самым большим из таких чисел и оно при этом удовлетворяет условию.)**

1–1. На острове рыцарей и лжецов (рыцари всегда говорят правду, а лжецы – врут) в некоторой компании каждый заявил остальным: «Среди вас – три рыцаря». Сколько рыцарей могло быть в этой компании? **(0 или 4 рыцаря. Если в компании нет рыцаря, то каждый лжец врёт, что отвечает условию задачи, значит, в компании**

могло быть 0 рыцарей. Если же в компании есть рыцарь, то каждый из них говорит правду, значит, рыцарей ровно 4, и при этом лжецы, если они есть в компании, действительно врут. Таким образом, в компании 0 или 4 рыцаря.)

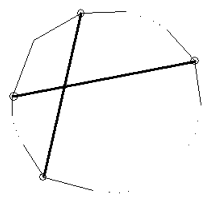
1–2. Изначально во всех клетках таблицы 3×3 стоят нули. Несколько раз выбирают квадрат 2×2 и увеличивают на 1 все числа, стоящие в нём. Какое число написано в центре таблицы (см. рис.), если известны числа только в четырёх клетках исходной таблицы? **(9. Каждое число на середине стороны равно сумме двух чисел в соседних с ним угловых клетках, значит, число в левом верхнем углу равно 5–2=3, число в правом верхнем углу равно 4–3=1. Число в центре равно сумме всех угловых чисел, т.е. 3+1+2+3=9.)**

	4	
5		
2		3

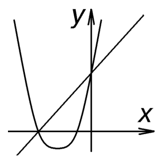
1–3. При каком наибольшем c уравнение $x^2+6x+c=0$ имеет решение? **(c=9, т.к.: *<u>1 решение:</u>* дискриминант должен быть неотрицательным, т.е. $D=6^2-4c\geq 0$. *<u>2 решение:</u>* $x^2+6x+c=(x+3)^2+c-9=0$, значит, $c\leq 9$.)**

1–4. Вася обнаружил в старой папиной копилке 30 советских монет достоинством в 10, 15 и 20 копеек на общую сумму в 5 рублей. Каких монет (10-ти-копеечных или 20-ти-копеечных) и на сколько в копилке больше? **(20-копеечных больше на 10 штук. Пусть было x монет по 10 копеек, y – по 15 копеек и z – по 20 копеек. Из условия получим систему уравнений: $x+y+z=30$, $10x+15y+20z=500$. Разделим второе уравнение на 5 и вычтем из него утроенное первое уравнение, получим, что $z-x=10$.)**

1–5. В выпуклом 20-угольнике провели все диагонали, причём никакие три из них не пересеклись в одной точке. Сколько точек пересечения диагоналей получилось внутри 20-угольника? **($C_{20}^4=\frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=4845$. Каждая точка пересечения определяется четвёркой вершин, которая даёт пару пересекающихся между собой двух диагоналей, а количество способов выбрать четыре точки из 20 вершин равно числу сочетаний из 20 по 4, т.е. C_{20}^4.)**



1–6. На чертеже изображены графики функций $y=2x^2+bx+c$ и $y=x+1$. Найдите b. **(3. При x=0 найдем координаты общей точки пересечения с осью ординат (0;1), значит, c=1. Из уравнения прямой следует, что координаты общей точки пересечения с осью абсцисс – (–1;0). Подставив её в уравнение параболы, найдём, что b=3.)**



2–2. У натурального числа можно любую нечётную цифру переставлять в конец, а любую чётную цифру переставлять в начало. Сколько существует девятизначных чисел, отличных от 123456789, из которых такими перестановками можно получить это число? **(8 чисел, в которых цифра 9 стоит на одном из восьми мест (между цифрами и в начале) ряда 12345678)**

2–3. Представьте число 2009 в виде произведения трёх целых чисел, сумма которых равна 7. **(2009=49·(−41)·(−1), 7=49−41−1)**

2–4. Произведение всех натуральных делителей натурального числа n равно 2^{45}. Найдите n. **(2^9 = 512. Поскольку произведение всех делителей искомого числа – степень числа 2, само оно – тоже степень числа 2. Пусть оно равно 2^n. Тогда его делители равны 1, 2, 2^2, …, 2^n, а их произведение равно $2^{1+2+\ldots+n}=2^{n(n+1)/2}$. Отсюда $n(n+1)/2=45$, а n=9.)**

2–5. Сколько решений имеет ребус: $5-Я=С\cdot М\cdot Е\cdot Н\cdot А$? *(одинаковые буквы – одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры)* **(8400 решений. Цифра «Я» равна**

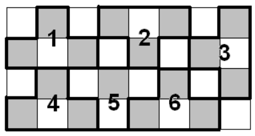
только 5, тогда в правой части обязательно есть 0 (5 вариантов – любая из букв), а остальные 4 буквы могут принимать четыре значения из 8 оставшихся цифр, т.е. для них $A_8^4 = 8\cdot7\cdot6\cdot5 = 1680$ **вариантов. Значит, всего 5·1680=8400 решений.)**

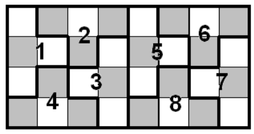
2–6. При каком наибольшем N на шахматной доске можно расставить N чёрных и N белых королей так, чтобы чёрные не били белых, а белые – чёрных? Приведите ответ и пример расстановки. **(27, например, короли одного цвета занимают полностью три нижних строки и три левых клетки четвёртой строки, а короли другого цвета располагаются симметрично королям первого цвета относительно центра доски)**

3–3. Найдите наибольшее натуральное число из различных цифр, сумма цифр которого делится на произведение его цифр. **(321)**

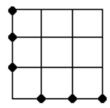
3–4. Найдите наибольшее натуральное число из различных цифр, произведение цифр которого делится на сумму его цифр. **(9876543210)**

3–5. На шахматной доске (без наложений, по линиям сетки, в пределах доски) лежат четырёхклеточные фигурки в виде буквы «Т», закрывая при этом все чёрные клетки. Какое количество таких фигурок может быть? **(12, 14 или 16. Каждая фигурка занимает 1 или 3, т.е. нечётное количество чёрных клеток, которых на доске чётное количество (32), значит, должно быть чётное количество фигурок. При этом их количество должно быть не меньше 32:3 (каждая фигурка занимает не более 3 чёрных клеток) и не больше 64:4 (каждая фигурка занимает 4 клетки всей доски). Т.о., всего чётное количество фигурок, большее 10 и не большее 16, т.е. 12, 14 или 16. При этом все случаи реализуются, т.к. чёрные клетки на половине доски – прямоугольнике 4×8 – можно закрыть или 6, или 8 фигурками (см. рисунок).)**





3–6. Какое наибольшее число узлов клетчатого квадрата 3×3 можно выбрать так, чтобы никакие три выбранные точки не были вершинами равнобедренного прямоугольного треугольника? Приведите ответ и пример. **(6. Оценка доказывается перебором по наибольшему количеству выбранных точек в одном ряду.)**



4–4. Найдите все натуральные n такие, что $n(n+p)$ – точный квадрат при фиксированном нечётном простом p. **(*n*=$\left(\frac{p-1}{2}\right)^2$. Пусть $n(n+p)=m^2$. Если *n* кратно *p*, то, сокращая, придём к уравнению вида $x(x+1)=y^2$ в натуральных числах, которое решений не имеет (*x* и *x*+1 взаимно просты и не могут одновременно быть квадратами). Если же *n* не делится на *p*, то *n* и *n*+*p* взаимно просты и оба являются квадратами натуральных чисел: $n=k^2$, $k^2+p=l^2$ и $l>k$. Отсюда, $(l-k)(l+k)=p$, следовательно, $l-k=1$, $l+k=p$, и *n* находится однозначно: $n = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$.)**

4–5. Точка M, лежащая внутри равностороннего треугольника, удалена от его сторон на 1 см, 2 см и 2 см. Найдите площадь треугольника. **($\frac{25}{\sqrt3} = \frac{25\sqrt3}{3}$. Сумма данных чисел равна высоте треугольника. Теперь нетрудно найти сторону и площадь.)**

5	**7**	**11**
8	**13**	**2**
10	**3**	**10**

4–6. *Простым магическим квадратом* назовём квадрат 3×3, в клетках которого стоят по одному 9 натуральных чисел (необязательно различных), причём суммы чисел в каждой строке и каждом столбце равны между собой. Найдите наибольшее n, при котором существует простой магический квадрат, содержащий первые n простых чисел. Приведите ответ и пример квадрата. **(6. Заметим, что существует ровно 1 чётное простое число – 2, значит, из равенства всех сумм по строкам и столбцам следует, что должно быть ещё хотя бы 2 чётных числа, т.е. $n\le 7$. Если $n=7$, тогда в таблице будут числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 и ещё ровно 2 чётных числа. Тогда все 3 чётных числа будут находиться в разных строках и столбцах, при этом каждое простое нечётное число (a) должно двумя разными способами в паре с другим простым нечётным числом (b) дополняться до одинаковых сумм другими числами, т.е. другие числа можно так обозначить, что $a+c=b+d$, $a+f=b+e$ (числа a и b лежат в разных строках и столбцах, в других клетках пересечений которых лежат чётные числа). Для числа 17 это варианты 17+3=13+7 и 17+7=13+11, но тогда не использовано число 5, – противоречие. Значит, $n\le 6$ и в квадрате должны быть использованы числа 2, 3, 5, 7, 11, 13. Пример такой расстановки – см. рис.)**

5–5. Пусть $\alpha\le\beta\le\gamma\le\delta$ – градусные меры углов некоторого выпуклого четырёхугольника. Известно, что из этих четырёх чисел нельзя выбрать три так, чтобы они выражали (в метрах) длины сторон некоторого треугольника. При каких значениях γ такое возможно? **($90^o<\gamma<180^o$. В выпуклом четырёхугольнике сумма $\alpha+\beta+\gamma>180$, поэтому при $\gamma\le 90$ будет выполняться неравенство треугольника для большего отрезка $\gamma<\alpha+\beta$. При любом же γ, лежащем в интервале (90; 180), существуют такие значения четырёх других чисел, когда треугольника составить нельзя, т.е. $\gamma\ge\alpha+\beta$ и $\delta\ge\gamma+\beta$, в частности, при $\alpha=2\Delta_1$, $\beta=\Delta_2$, $\gamma=180-\Delta_1-\Delta_2$, $\delta=180-\Delta_1$, где $0<2\Delta_1\le\Delta_2<45$.)**

5–6. В строчку по порядку выписаны все натуральные числа от 1 до n. В следующей строчке под каждыми двумя числами записывается их сумма. Затем то же самое делается с полученной строкой и т.д., пока не останется одно число. Найдите это число. **($(n+1)2^{n-2}$. Число k из первой строки попадает в конечное число (сумму S) с коэффициентом, равным числу путей, которыми из k можно попасть в S. Рассмотрим числа k и $n-k+1$. Их сумма равна $n+1$, а попасть из них в S можно одинаковым числом путей. Следовательно, искомое число в $(n+1)/2$ раз больше числа путей из S к первой строке. А оно, очевидно, равно 2^{n-1}. <u>Второе решение</u>. Обозначим искомое число S_n. Оно находится в n-й строке. Заметим, что числа k-й строки образуют арифметическую прогрессию с разностью 2^{k-1}. Поэтому $S_{n+1}=2S_n+2^{n-1}$. Теперь ответ легко получить (например, по индукции).)**

6–6. Пусть $2S$ – суммарный вес некоторого набора гирек. Число k назовём *средним*, если в наборе можно выбрать k гирек, суммарный вес которых равен S. Какое наибольшее количество средних чисел может быть у набора из 10 гирек? Приведите ответ и пример набора из 10 гирек с наибольшим количеством средних чисел. **(7 средних чисел в следующем наборе гирек – 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 (9 чисел Фибоначчи) и 20. S=54=34+20=13+21+20=5+8+21+20=2+3+8+21+20=1+1+3+8+21+20= 1+1+2+3+5+8+34=1+1+2+3+5+8+13+21. Число 10 не является средним. Если k – среднее, то и $(10-k)$ – тоже среднее. Если число 1 – среднее, тогда есть гирька веса S, то средним будет ещё только число 9. Значит, будет не более 7 средних чисел (2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8).)**