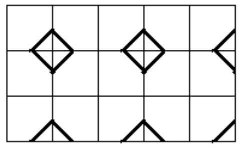


**0–0.** Клетчатый прямоугольник $10\times12$ согнули по линиям сетки несколько раз так, что получился квадрат $1\times1$. Сколько частей могло получиться после того, как этот квадрат разрезали по отрезку, соединяющему середины двух его соседних сторон? **(43, 37, 36 или 31. В каждой клетке будет сделан ровно один разрез, а по разрезу в одной клетке однозначно определяется, как разрезаны остальные клетки. У нас получится разрезание вида, указанного на чертеже, а в зависимости от расположения вырезанных маленьких квадратиков и получится количество частей ($6\cdot7+1=43$, $6\cdot6+1=37$, $5\cdot7+1=36$, $5\cdot6+1=31$).)**

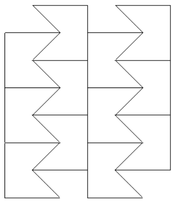
**0–1.** При каком наибольшем $c$ уравнение $x^2+6x+c=0$ имеет решение? **($c=9$, т.к. дискриминант должен быть неотрицательным, т.е. $D=6^2-4c\geq0$)**

| | | |
|---|---|---|
| | 4 | |
| 5 | | |
| 2 | | 3 |

**0–2.** Изначально во всех клетках таблицы $3\times3$ стоят нули. Несколько раз выбирают квадрат $2\times2$ и увеличивают на 1 все числа, стоящие в нём. Какое число написано в центре таблицы (см. рис.), если известны числа только в четырёх клетках исходной таблицы? **(9. Каждое число на середине стороны равно сумме двух чисел в соседних с ним угловых клетках, значит, число в левом верхнем углу равно $5-2=3$, число в правом верхнем углу равно $4-3=1$. Число в центре равно сумме всех угловых чисел, т.е. $3+1+2+3=9$.)**

**0–3.** Вася обнаружил в старой папиной копилке 30 советских монет достоинством в 10, 15 и 20 копеек на общую сумму в 5 рублей. Каких монет (10-ти-копеечных или 20-ти-копеечных) и на сколько в копилке больше? **(20-копеечных больше на 10 штук. Пусть было $x$ монет по 10 копеек, $y$ – по 15 копеек и $z$ – по 20 копеек. Из условия получим систему уравнений: $x+y+z=30$, $10x+15y+20z=500$. Разделим второе уравнение на 5 и вычтем из него утроенное первое уравнение, получим, что $z-x=10$.)**

**0–4.** Решите уравнение $2^x(4-x)=2x+4$ в целых числах. **(0, 1 и 2. Если $x>4$, либо $x<-2$, то левая и правая часть имеют разные знаки. Остальные значения проверяются.)**

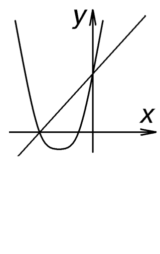


**0–5.** Покройте без наложений плоскость одинаковыми невыпуклыми пятиугольниками. **(например, разобьём плоскость на полосы одинаковой ширины, а каждую из них – на равные пятиугольные «флажки»)**

**0–6.** Найдите наибольшее натуральное число из различных цифр такое, что любое число из его шести подряд идущих цифр делится на 6. **(9753186420, т.к. все цифры, начиная с шестой, должны быть чётными, а данное число является самым большим из таких чисел и оно при этом удовлетворяет условию.)**

**1–1.** У натурального числа можно любую нечётную цифру переставлять в конец, а любую чётную цифру переставлять в начало. Сколько существует девятизначных чисел, отличных от 123456789, из которых такими перестановками можно получить это число? **(8 чисел, в которых цифра 9 стоит на одном из восьми мест (между цифрами и в начале) ряда 12345678)**

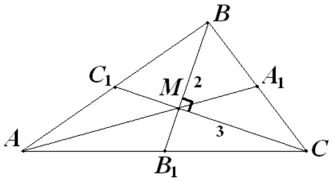
**1–2.** Произведение всех натуральных делителей натурального числа $n$ равно $2^{45}$. Найдите $n$. **($2^9=512$. Поскольку произведение всех делителей искомого числа – степень числа 2, само оно – тоже степень числа 2. Пусть оно равно $2^n$. Тогда его делители равны 1, 2, $2^2$, …, $2^n$, а их произведение равно $2^{1+2+\ldots+n}=2^{n(n+1)/2}$. Отсюда $n(n+1)/2=45$, а $n=9$.)**




**1–3.** На чертеже изображены графики функций $y=2x^2+bx+c$ и $y=x+1$.

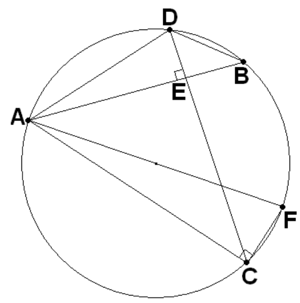
Найдите $b$. **(3. При $x$=0 найдем координаты общей точки пересечения с осью ординат (0;1), значит, $c$=1. Из уравнения прямой следует, что координаты общей точки пересечения с осью абсцисс – (–1;0). Подставив её в уравнение параболы, найдём, что $b$=3.)**

**1–4.** Найдите длину третьей медианы треугольника, если две другие перпендикулярны между собой и равны 2 и 3. **($\sqrt{13}$. Пусть медианы $BB_1$=2, $CC_1$=3, третья медиана – $AA_1$, а $M$ – точка пересечения медиан. Тогда из прямоугольного треугольника $BCM$ следует, что отрезок $MA_1$ равен половине гипотенузы $BC$, длину которой можно найти по теореме Пифагора. Учитывая также, что точка пересечения медиан делит их в отношении 2:1 от вершины, найдём третью медиану $AA_1 = 3MA_1 = \frac{3}{2}BC = \frac{3}{2}\sqrt{BM^2 + CM^2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$.)**




**1–5.** Точка $M$, лежащая внутри равностороннего треугольника, удалена от его сторон на 1 см, 2 см и 2 см. Найдите площадь треугольника. **($\frac{25}{\sqrt{3}} = \frac{25\sqrt{3}}{3}$. Сумма данных чисел равна высоте треугольника. Теперь нетрудно найти сторону и площадь.)**

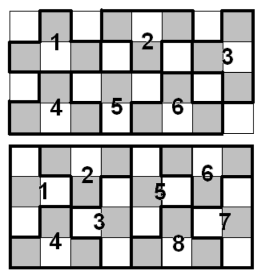
**1–6. (Задача Архимеда)** «Если в круге хорды $AB$ и $CD$ пересекаются в точке $E$ под прямым углом, то сумма квадратов отрезков $AE$, $BE$, $CE$ и $DE$ равна ….» Чему равна? **(«…квадрату диаметра круга». Пусть $AF$ – диаметр. Так как $\angle AED$ – прямой, то он равен $\angle ACF$. Но $\angle ADC = \angle AFC$, следовательно, в треугольниках $ADE$ и $AFC$ $\angle DAE = \angle CAF$. Поэтому дуга $CF$ равна дуге $BD$, а следовательно, $CF=BD$. Но по теореме Пифагора $AE^2+CE^2=AC^2$, $DE^2+BE^2=CF^2$ и $AC^2+CF^2=AF^2$, значит, получаем: $AE^2+CE^2+DE^2+BE^2=AF^2$.)**




**2–2.** Найдите наибольшее натуральное число из различных цифр, сумма цифр которого делится на произведение его цифр. **(321)**

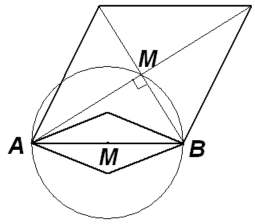
**2–3.** Сколько решений имеет ребус: $5 - Я = C \cdot M \cdot E \cdot H \cdot A$? *(одинаковые буквы – одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры)* **(8400 решений. Цифра «Я» равна только 5, тогда в правой части обязательно есть 0 (5 вариантов – любая из букв), а остальные 4 буквы могут принимать четыре значения из 8 оставшихся цифр, т.е. для них $A_8^4 = 8\cdot7\cdot6\cdot5 = 1680$ вариантов. Значит, всего 5·1680=8400 решений.)**

**2–4.** На шахматной доске (без наложений, по линиям сетки, в пределах доски) лежат четырёхклеточные фигурки в виде буквы «Т», закрывая при этом все чёрные клетки. Какое количество таких фигурок может быть? **(12, 14 или 16. Каждая фигурка занимает 1 или 3, т.е. нечётное количество чёрных клеток, которых на доске чётное количество (32), значит, должно быть чётное количество фигурок. При этом их количество должно быть не меньше 32:3 (каждая фигурка занимает не более 3 чёрных клеток) и не больше 64:4 (каждая фигурка занимает 4 клетки всей доски). Т.о. всего чётное количество фигурок, большее 10 и не большее 16, т.е. 12, 14 или 16. При этом все случаи реализуются, т.к. чёрные клетки на половине доски – прямоугольнике 4×8 – можно закрыть или 6, или 8 фигурками (см. рисунок).)**




**2–5.** На плоскости отмечены точки $A$ и $B$. Найдите геометрическое место центров ромбов, двумя вершинами которых являются $A$ и $B$. **(окружность с диаметром $AB$ и её**

**центр, причём точки *A* и *B* выколоты. Пусть *M* – центр ромба, тогда либо *M* – середина *AB*, либо $\angle AMB$=90°, значит, в этом случае *M* принадлежит окружности с диаметром *AB*, но при этом *M* не может совпадать с точками *A* и *B*.)**

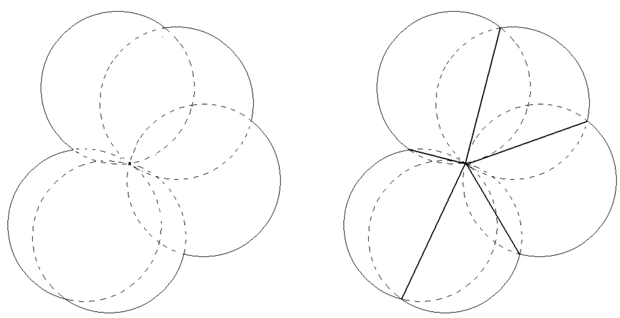



**2–6.** При каком наибольшем *N* на шахматной доске можно расставить *N* чёрных и *N* белых королей так, чтобы чёрные не били белых, а белые – чёрных? Приведите ответ и пример расстановки. **(27, например, короли одного цвета занимают полностью три нижних строки и три левых клетки четвёртой строки, а короли другого цвета располагаются симметрично королям первого цвета относительно центра доски)**

**3–3.** Найдите наибольшее натуральное число из различных цифр, произведение цифр которого делится на сумму его цифр. **(9876543210)**

**3–4.** Сколько рациональных точек лежит на сфере $(x-\sqrt{5})^2+(y-\sqrt{3})^2+(z-\sqrt{2})^2=10$? *Рациональная точка – точка, у которой все три декартовы координаты – рациональные числа.* **(1 точка – с координатами (0; 0; 0). Это доказывается раскрытием скобок, естественными преобразованиями и рассуждениями с рациональностью.)**

**3–5.** *n* бумажных кругов радиуса 1 расположены на плоскости таким образом, что их границы проходят через одну точку, причём эта точка находится внутри всей области плоскости, покрытой кругами (см. рис.). Эта область представляет собой многоугольник с криволинейными сторонами. Какой периметр может быть у такого криволинейного многоугольника? **(4π. Длина дуги каждого круга, входящая в периметр, пропорциональна углу, на который она опирается. Поскольку сумма таких вписанных углов равна 2π, а сумма центральных углов, высекающих эти дуги, равна 4π, то весь периметр будет равен удвоенному периметру одного такого круга, т.е. 4π.)**



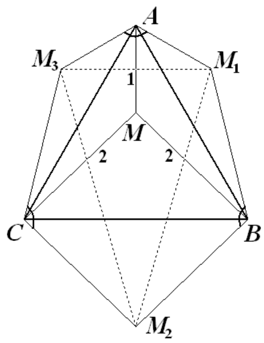
**3–6.** *Простым магическим квадратом* назовём квадрат 3×3, в клетках которого стоят по одному 9 натуральных чисел (необязательно различных), причём суммы чисел в каждой строке и каждом столбце равны между собой. Найдите наибольшее *n*, при котором существует простой магический квадрат, содержащий первые *n* простых чисел. Приведите ответ и пример квадрата. **(6. Заметим, что существует ровно 1 чётное простое число – 2, значит, из равенства всех сумм по строкам и столбцам следует, что должно быть ещё хотя бы 2 чётных числа, т.е. *n*≤7. Если *n*=7, значит, в таблице будут числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 и ещё ровно 2 чётных числа. Тогда все 3 чётных числа будут находиться в разных строках и столбцах, при этом каждое простое нечётное число (*a*) должно двумя разными способами в паре с другим простым нечётным числом (*b*) дополняться до одинаковых сумм другими числами, т.е. другие числа можно так обозначить, что *a*+*c*=*b*+*d*, *a*+*f*=*b*+*e* (числа *a* и *b* лежат в разных строках и столбцах, в других клетках пересечений которых лежат чётные числа). Для числа 17 это варианты 17+3=13+7 и 17+7=13+11, но тогда не использовано число 5, – противоречие. Значит, *n*≤6 и в квадрате должны быть использованы числа 2, 3, 5, 7, 11, 13. Пример такой расстановки – см. рис.)**

| | | |
|---|---|---|
| 5 | 7 | 11 |
| 8 | 13 | 2 |
| 10 | 3 | 10 |

**4–4.** Пусть $\alpha\le\beta\le\gamma\le\delta$ – градусные меры углов некоторого выпуклого четырёхугольника. Известно, что из этих четырёх чисел нельзя выбрать три так, чтобы они выражали (в метрах) длины сторон некоторого треугольника. При каких значениях $\gamma$ такое возможно? **($90^o<\gamma<180^o$. В выпуклом четырёхугольнике сумма $\alpha+\beta+\gamma>180$, поэтому при $\gamma\le 90$ будет выполняться неравенство треугольника для большего отрезка $\gamma<\alpha+\beta$. При любом же $\gamma$, лежащем в интервале (90; 180), существуют такие значения четырёх других чисел, когда треугольника составить нельзя, т.е. $\gamma\ge\alpha+\beta$ и $\delta\ge\gamma+\beta$, в частности, при $\alpha=2\Delta_1$, $\beta=\Delta_2$, $\gamma=180-\Delta_1-\Delta_2$, $\delta=180-\Delta_1$, где $0<2\Delta_1\le\Delta_2<45$.)**

**4–5.** В строчку по порядку выписаны все натуральные числа от 1 до $n$. В следующей строчке под каждыми двумя числами записывается их сумма. Затем то же самое делается с полученной строкой и т.д., пока не останется одно число. Найдите это число. **($(n+1)2^{n-2}$. Число $k$ из первой строки попадает в конечное число (сумму $S$) с коэффициентом, равным числу путей, которыми из $k$ можно попасть в $S$. Рассмотрим числа $k$ и $n-k+1$. Их сумма равна $n+1$, а попасть из них в $S$ можно одинаковым числом путей. Следовательно, искомое число в $(n+1)/2$ раз больше числа путей из $S$ к первой строке. А оно, очевидно, равно $2^{n-1}$. <u>Второе решение</u>. Обозначим искомое число $S_n$. Оно находится в $n$-й строке. Заметим, что числа $k$-й строки образуют арифметическую прогрессию с разностью $2^{k-1}$. Поэтому $S_{n+1}=2S_n+2^{n-1}$. Теперь ответ легко получить (например, по индукции).)**

**4–6.** Точка М, лежащая внутри равностороннего треугольника, удалена от его вершин на 1 см, 2 см и 2 см. Найдите площадь треугольника. ($\frac{3\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{8}$**. Отразив точку $M$ относительно сторон исходного треугольника $ABC$, получим шестиугольник $AM_1BM_2CM_3$ с углами по 120° при вершинах $A$, $B$ и $C$. Площадь этого шестиугольника в два раза больше площади исходного треугольника и равна сумме площадей треугольников $M_1BM_2$, $M_2CM_3$, $M_3AM_1$ и $M_1M_2M_3$, площади которых легко находятся.)**




**5–5.** Найдите все пары квадратных трехчленов $x^2+ax+b$, $x^2+cx+d$ такие, что $a$ и $b$ – корни второго трехчлена, а $c$ и $d$ – корни первого трехчлена. **($x^2+ax$, $x^2-ax$, где $a$ – любое число; $x^2+x-2$, $x^2+x-2$. По теореме Виета $a=-(c+d)$, $b=cd$, $c=-(a+b)$, $d=ab$. Тогда из этой системы получим, что $a+b+c=0$, $b=d$, $b=bc=ab$. Если $b=0$, то $d=0$, $c=-a$, где $a$ – любое. Если же $b\ne 0$, то $a=c=1$, $b=d=-2$.)**

**5–6.** Функция $f(x)$ определена при всех действительных $x$ и удовлетворяет условию $2f(x)+f(1-x)=x^2$. Найдите все такие $f(x)$. **($f(x)=\frac{x^2+2x-1}{3}$. Заметим, что $2f(x+1)+f(-x)=(x+1)^2$, а $2f(-x)+f(1+x)=x^2$, откуда $f(-x)=\frac{2x^2-(x+1)^2}{3}$.)**

**6–6.** Пусть $2S$ – суммарный вес некоторого набора гирек. Число $k$ назовём *средним*, если в наборе можно выбрать $k$ гирек, суммарный вес которых равен $S$. Какое наибольшее количество средних чисел может быть у набора из 10 гирек? Приведите ответ и пример набора из 10 гирек с наибольшим количеством средних чисел. **(7 средних чисел в следующем наборе гирек – 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 (9 чисел Фибоначчи) и 20. $S$=54=34+20=13+21+20=5+8+21+20=2+3+8+21+20=1+1+3+8+21+20= 1+1+2+3+5+8+34=1+1+2+3+5+8+13+21. Число 10 не является средним. Если $k$ – среднее, то и $(10-k)$ – тоже среднее. Если число 1 – среднее, тогда есть гирька веса $S$, то средним будет ещё только число 9. Значит, будет не более 7 средних чисел (2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8).)**