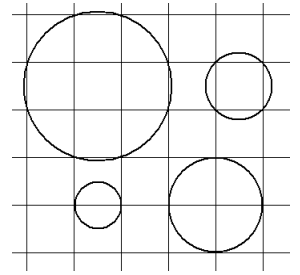


1. Какое наибольшее значение может принимать выражение  $\frac{T \cdot Y \cdot P \cdot H \cdot I \cdot P}{I \cdot G \cdot P}$ ? (одинаковые буквы – одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры) (3024=9·8·7·6, т.к. цифры нужны ненулевые и  $\frac{T \cdot Y \cdot P \cdot H \cdot I \cdot P}{I \cdot G \cdot P} = \frac{T \cdot Y \cdot P \cdot H}{G} \geq \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1} = 3024$ , причём это значение достигается при соответствующих значениях букв)
2. В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при основании равна основанию. Найдите углы треугольника (в градусах). (36°, 72° и 72°. Пусть угол при основании треугольника равен 2x, тогда сумма углов меньшего равнобедренного треугольника равна 2x+2x+x=5x=180°. Тогда углы исходного треугольника равны 36°, 72° и 72°.)
3. Укажите наименьшее по мощности (количеству цифр) множество цифр, из которого хотя бы одна цифра входит в десятичную запись либо натурального числа N, либо числа 3N. Приведите ответ и пример множества. (3 цифры – 1, 2, 9. Для пар чисел с непересекающимися цифрами (2; 6), (3; 9), (5; 15) видим, что множество должно содержать не менее 3 цифр. Если число N начинается с 1 и 2, то первая его цифра входит в множество; если же число N начинается с других цифр, то число 3N начинается либо с 9, либо с 1, либо с 2.)
4. Клетчатый прямоугольник 10×12 согнули по линиям сетки несколько раз так, что получился квадрат 1×1. Сколько частей могло получиться после того, как этот квадрат разрезали по отрезку, соединяющему середины двух его противоположных сторон? (11 или 13, т.к. в каждой клетке будет сделан ровно один разрез и по разрезу в одной клетке однозначно определяется, как разрезаны остальные клетки. У нас получатся 11 или 13 полосок в зависимости от направления разрезов.)
5. На командном Турнире каждая школа могла выставить одну, две или три команды. Всего участвовало 22 команды из 15 школ. Сколько школ могло выступить тремя командами? (0, 1, 2 или 3 школы, т.к. излишек в 7=22-15 команд мог распределиться не более чем между тремя школами, выставившими по три команды, и несколькими школами, выставившими по две команды)
6. В таблицу, содержащую A строк и B столбцов, вписали по строкам натуральные числа от 1 до A·B в порядке возрастания, начиная с первой строки. Известно, что число 20 находится в третьей строке, 41 – в пятой, а 103 – в последней. Найдите все возможные значения A и B. (A=12, B=9. Из условия следует, что 2B<20≤3B, 4B<41≤5B, (A-1)B<103≤AB. Отсюда находим, что 8,2≤B<10, т.е. B=9, тогда A=[103/9]+1=12.)
7. При каком наибольшем N на шахматной доске можно расставить N чёрных и N белых коней так, чтобы чёрные не били белых, а белые – чёрных? (24, например, кони одного цвета занимают полностью три нижние строки, а кони другого цвета – три верхние строки)
8. Разложите на простые множители число 1 000 027. (7·19·73·103. 1000027=100<sup>3</sup>+3<sup>3</sup>=(100+3)·(10000-300+9)=103·9709=103·7·1387=103·7·(1460-73)=103·7·73·19)
9. В таблице 3×3 расставляются все целые числа от 1 до 9. Назовём амплитудой таблицы разность между наибольшим и наименьшим из шести произведений чисел по строкам и столбцам. Какое наименьшее значение может быть у амплитуды? (36=90-54. В одном из рядов с 1 произведение не превышает  $[\sqrt{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}] = 54$ . Если минимум равен 54, то 1 стоит в рядах с 6, 9 и 7, 8, а число 5 будет находиться в одном из рядов с одним из чисел 3 или 4. Тогда в этом ряду произведение будет не меньше 5·3·6=90. Если минимум будет меньше 54, то он будет не больше 48 (т.к. 49, 50, 51, 52, 53 не могут быть произведениями трёх чисел данного набора от 1 до 9), но тогда в одном из параллельных рядов произведение будет не меньше  $\sqrt{9!}:48 > 86$ , т.к. произведение произведений в трёх параллельных рядах равно 9!. Получим, что в таком случае амплитуда будет не менее 87-48=39.)
10. По разные стороны дороги стоят столбы так, что расстояния между крайними столбами с каждой стороны равно 1 км. Но с левой стороны расстояние между соседними столбами на 20% больше, чем с правой (между соседними столбами с каждой стороны одинаковое расстояние). Сколько столбов слева, если справа 85 столбов? (71 столб. Между столбами справа 84 промежутка «единичной» длины, тогда слева 84:1,2=70 промежутков.)

1	6	9
7	3	4
8	5	2

11. Какой может быть радиус у окружности, пересекающей линии клетчатой сетки только в узлах? ( $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 1 или  $\frac{\sqrt{10}}{2}$ . Всего существуют четыре окружности с нужным свойством, что доказывается перебором вариантов пересечения.)



12. В первой горизонтали шахматной доски стоят 8 белых ферзей, в последней горизонтали – 8 чёрных ферзей. За какое наименьшее число ходов белые ферзи могут поменяться местами с чёрными? ( $23=6\cdot 3+5$  ходов. Каждой паре ферзей на некрайних вертикалях надо сделать не менее 3 ходов, т.к. кто-то из них должен первым освободить своё место, при этом он не может сразу попасть в нужную ему горизонталь, т.о. этим ферзям надо не менее  $6\cdot 3=18$  ходов. По такой же причине 4 ферзям с двух крайних вертикалей надо сделать не менее 5 ходов. Пример на 23 хода: 1). чёрные ферзи с клеток  $b8-g8$  уходят на клетки  $a7-a2$  (6 ходов); 2). белые ферзи с  $b1-g1$  идут на  $b8-g8$  (6 ходов); 3). чёрные ферзи с  $a2-a7$  идут на  $b1-g1$ ; 4). остальные четыре ферзя совершают по очереди 5 ходов:  $a1-b2$ ,  $a8-a1$ ,  $h1-a8$ ,  $h8-h1$ ,  $b2-h8$ .)
13.  $n$  – такое натуральное число, что числа  $(3n-1)$  и  $(n-10)$  делятся на простое число  $p$ . При каких  $p$  такое возможно? (29. Заметим, что  $(3n-1)-3(n-10)=29$  должно делиться на  $p$ .)
14. Назовём натуральное число *вредным*, если оно не равно произведению цифр никакого другого числа. Сколько в первой сотне вредных чисел? (54 вредных числа. При разложении на простые множители не вредного числа могут встретиться только 2, 3, 5 и 7 или их степени, значит, в разложении на простые множители вредного числа (а оно больше 1) должно быть хотя бы одно простое неоднозначное число. Т.о., в первой сотне вредными являются все простые двузначные (21 число) и кратные им (ещё 8 кратных 11, 6 кратных 13, 4 кратных 17, 4 кратных 19, 3 кратных 23, 2 кратных 29, 2 кратных 31, по 1 кратных 37, 41, 43, 47, - причём это разные числа), всего  $21+8+6+4+4+3+2+2+4=54$  вредных числа.)
15. Пять вершин правильного 110-угольника покрасили в красный цвет, а другие его 11 вершин – в синий цвет так, что красные точки оказались вершинами правильного пятиугольника, а синие – вершинами правильного 11-угольника. У скольких сторон 110-угольника концы могли оказаться окрашенными в оба цвета? (2 стороны. Красные точки разбивают периметр 110-угольника на 5 равных частей, в одну из которых по принципу Дирихле входят хотя бы 3 синие точки. Между синими точками содержится 9 вершин 110-угольника, поэтому 3 синие точки вместе с другими расположенными между ними вершинами образуют в совокупности 21 вершину, а это число вершин между двумя соседними красными точками. Следовательно, в этом промежутке красные точки соседствуют с синими и дают нам две нужные стороны. Больше таких пар соседних разноцветных точек нет.)
16. В теннисном турнире участвуют 16 теннисистов с рейтингами от 1 до 16. Турнир проходит по олимпийской системе, когда проигравший выбывает (результат матча не зависит от рейтинга) и после каждого круга игроков становится в два раза меньше. Матч считается *интересным*, если в нём участвуют игроки, рейтинги которых отличаются не более чем на 2. Какое наибольшее количество интересных матчей могло оказаться в турнире? ( $14=15-1$  матчей. Если рассмотреть граф-дерево турнира, то между игроками с рейтингами 1 и 16 существует путь, содержащий не более  $7=2\cdot 3+1$  рёбер, т.к. до финала состоятся три круга. Но тогда по принципу Дирихле в одном из матчей на этом пути играли игроки (вершины некоторого ребра), рейтинги которых отличались не менее чем на  $(16-1):7>2$ , т.е. хотя бы один из этих матчей обязательно был неинтересным. Пример ровно на 1 неинтересный матч существует, причём этот неинтересный матч был сыгран в финале. 1-й круг (первыми указаны победители матчей) – 2-1, 4-3, 5-6, 7-8, 10-9, 12-11, 13-14, 15-16; 2-й круг – 4-2, 5-7, 12-10, 13-15; 3-й круг (полуфинал) – 4-5, 12-13; 4-й круг (финал) – 4-12.)