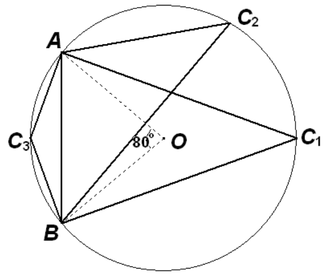
V Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». Турнир математических игр.
Математическая игра «Пенальти»**. *<u>Старшая лига (9-11 класс).</u>* <u>Решения</u>. *11 сентября 2009 года***

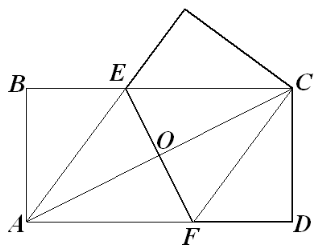
1. Какое наибольшее значение может принимать выражение $\frac{Т \cdot У \cdot Р \cdot Н \cdot И \cdot Р}{И \cdot Г \cdot Р}$? *(одинаковые буквы – одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры)* (**3024=9·8·7·6, т.к. цифры нужны ненулевые и** $\frac{Т \cdot У \cdot Р \cdot Н \cdot И \cdot Р}{И \cdot Г \cdot Р} = \frac{Т \cdot У \cdot Р \cdot Н}{Г} \geq \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1} = 3024$, **причём это значение достигается при соответствующих значениях букв)**



2. Чему равен больший угол равнобедренного треугольника *ABC*, если $\angle AOB$=80°? (*O* – центр описанной окружности ΔABC) **(70°, 100° или 140°. Из свойств вписанных углов следует, что $\angle ACB$=40° или 140°, тогда два других угла в зависимости от случая (см. чертёж) равны либо 40° и 100°, либо 70° и 70°, либо 20° и 20°.)**

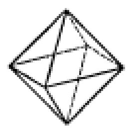
3. Укажите наименьшее по мощности (количеству цифр) множество цифр, из которого хотя бы одна цифра входит в десятичную запись либо натурального числа *N*, либо числа 3*N*. Приведите ответ и пример множества. **(3 цифры – 1, 2, 9. Для пар чисел с непересекающимися цифрами (2; 6), (3; 9), (5; 15) видим, что множество должно содержать не менее 3 цифр. Если число *N* начинается с 1 и 2, то первая его цифра входит в множество; если же число *N* начинается с других цифр, то число 3*N* начинается либо с 9, либо с 1, либо с 2.)**

4. Бумажный прямоугольник *ABCD* площади 1 перегнули по прямой так, что точка *A* совпала с точкой *C*. Какую площадь может иметь получившийся многоугольник? **(1/2≤*S*<3/4. Отрезок сгиба *EF* будет частью серединного перпендикуляра к диагонали *AC*. Площадь получившегося многоугольника будет меньше площади исходного прямоугольника на площадь треугольника *AEF*, совпавшего с треугольником *CEF*. А их площадь будет не меньше ½ (в случае квадрата) и больше ¼ (в пределе стремится к ¼, если одна из сторон прямоугольника стремится к 0. Причём по непрерывности все значения площади этого треугольника в интервале (1/4;1/2] возможны.)**



5. Найдите все целые числа *n*, для которых число $\sqrt{\frac{25}{2}+\sqrt{\frac{625}{4}-n}} + \sqrt{\frac{25}{2}-\sqrt{\frac{625}{4}-n}}$ является целым. **(0 и 144. Если указанное число *A* – целое, то и $A^2 = 25 + 2\sqrt{n}$ – целое число. Так как $2\sqrt{n} \leq 25$, то $A^2 \leq 50$. Кроме того, число A^2 нечётно. Поэтому *A* равно 5 и 7. Соответственно, $\sqrt{n}$ равен 0 и 12.)**

6. У каких правильных многогранников существует путь, проходящий по каждому ребру ровно один раз (эйлеров путь)? **(октаэдр, т.к. только он удовлетворяет критерию эйлеровости – граф должен быть связным и иметь не более 2 нечётных вершин)**



7. Решите систему уравнений: $\begin{cases} y = \arcsin \sin x, \\ x^2 + y^2 = \pi^2 \end{cases}$. (**$x = \pm\pi; y = 0$. Поскольку $y = \arcsin \varphi$, где $\varphi = \sin x$, то $y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Из второго равенства получаем, что $x \in [-\pi;\pi]$. Кроме того, из $y = \arcsin \sin x \Rightarrow \sin y = \sin x \Rightarrow 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) = 0$. Следовательно, $x - y = 2\pi n$ или $x + y = \pi + 2\pi m$, $m, n \in Z$. Учитывая ограничения на *x* и *y*, получаем ответ.)**

8. Разложите на простые множители число 1 000 027. **(7·19·73·103. 1000027=100^3+3^3=(100+3)·(10000-300+9)=103·9709=103·7·1387=103·7·(1460-73)=103·7·73·19)**

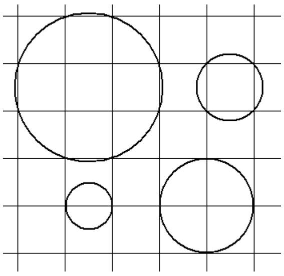
9. В таблице 3×3 расставляются все целые числа от 1 до 9. Назовём *амплитудой* таблицы разность между наибольшим и наименьшим из шести произведений чисел по строкам и столбцам. Какое наименьшее значение может быть у амплитуды? **(36=90–54. В одном из рядов с 1 произведение не превышает $[\sqrt{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}] = 54$. Если минимум равен 54, то 1 стоит в рядах с 6, 9 и 7, 8, а число 5 будет находиться в одном из рядов с одним из**

1	6	9
7	3	4
8	5	2

чисел 3 или 4. Тогда в этом ряду произведение будет не меньше 5·3·6=90. Если минимум будет меньше 54, то он будет не больше 48 (т.к. 49, 50, 51, 52, 53 не могут быть произведениями трёх чисел данного набора от 1 до 9), но тогда в одном из параллельных рядов произведение будет не меньше $\sqrt{9!:48} > 86$, т.к. произведение произведений в трёх параллельных рядах равно 9!. Получим, что в таком случае амплитуда будет не менее 87-48=39.)

10. Клетчатый прямоугольник 10×12 согнули по линиям сетки несколько раз так, что получился квадрат 1×1. Сколько частей могло получиться после того, как этот квадрат разрезали по отрезку, соединяющему середины двух его противоположных сторон? **(11 или 13, т.к. в каждой клетке будет сделан ровно один разрез и по разрезу в одной клетке однозначно определяется, как разрезаны остальные клетки. У нас получатся 11 или 13 полосок в зависимости от направления разрезов.)**

11. Какой может быть радиус у окружности, пересекающей линии клетчатой сетки только в узлах? ($\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, **1 или** $\frac{\sqrt{10}}{2}$**. Всего существуют четыре окружности с нужным свойством, что доказывается перебором вариантов пересечения.)**



12. В первой горизонтали шахматной доски стоят 8 белых ферзей, в последней горизонтали – 8 чёрных ферзей. За какое наименьшее число ходов белые ферзи могут поменяться местами с чёрными? **(23=6·3+5 хода. Каждой паре ферзей на некрайних вертикалях надо сделать не менее 3 ходов, т.к. кто-то из них должен первым освободить своё место, при этом он не может сразу попасть в нужную ему горизонталь, т.о. этим ферзям надо не менее 6·3=18 ходов. По такой же причине 4 ферзям с двух крайних вертикалей надо сделать не менее 5 ходов. Пример на 23 хода: 1). чёрные ферзи с клеток *b*8-*g*8 уходят на клетки *a*7-*a*2 (6 ходов); 2). белые ферзи с *b*1-*g*1 идут на *b*8-*g*8 (6 ходов); 3). чёрные ферзи с *a*2-*a*7 идут на *b*1-*g*1; 4). остальные четыре ферзя совершают по очереди 5 ходов: *a*1-*b*2, *a*8-*a*1, *h*1-*a*8, *h*8-*h*1, *b*2-*h*8.)**

13. Решите уравнение: $\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=\frac{10x}{3}-\frac{40}{x}$. **(6; –2;** $3-\sqrt{21}$ **;** $3+\sqrt{21}$**. Сделаем замену переменных** $t=\frac{x}{3}-\frac{4}{x}$ **и приведём уравнение к квадратному $3t^2+8=10t$, корнями которого будут 2 и** $\frac{4}{3}$**. После этого для каждого из этих двух значений решим соответствующее уравнение, которое также сводится к квадратному.)**

14. Назовём натуральное число *вредным*, если оно не равно произведению цифр никакого другого числа. Сколько в первой сотне вредных чисел? **(54 вредных числа. При разложении на простые множители невредного числа могут встретиться только 2, 3, 5 и 7 или их степени, значит, в разложении на простые множители вредного числа (а оно больше 1) должно быть хотя бы одно простое неоднозначное число. Т.о., в первой сотне вредными являются все простые двузначные (21 число) и кратные им (ещё 8 кратных 11, 6 кратных 13, 4 кратных 17, 4 кратных 19, 3 кратных 23, 2 кратных 29, 2 кратных 31, по 1 кратных 37, 41, 43, 47, - причём это разные числа), всего 21+8+6+4+4+3+2+2+4=54 вредных числа.)**

15. Найдите наибольшее значение выражения $xy + x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$. **(** $\sqrt{2}$**. Так как** $|x|, |y| \le 1$**, то можно считать, что $x=\sin\alpha$, $y=\sin\beta$, где** $\alpha, \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$**. Тогда данное выражение принимает вид:** $\sin\alpha\cdot\sin\beta+\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta-\cos\alpha\cdot\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)-\cos(\alpha+\beta)=\sqrt{2}\cdot\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$**. Максимум достигается, например, при** $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y=1$.**)**

16. В теннисном турнире участвуют 16 теннисистов с рейтингами от 1 до 16. Турнир проходит по олимпийской системе, когда проигравший выбывает и после каждого круга игроков становится в два раза меньше. Матч считается *интересным*, если в нём участвуют игроки, рейтинги которых отличаются не более чем на 2. Какое наибольшее количество интересных матчей могло оказаться в турнире? **(14=15-1 матчей. Если рассмотреть граф-дерево турнира, то между игроками с рейтингами 1 и 16 существует путь, содержащий не более 7=2·3+1 рёбер, т.к. до финала состоятся три круга. Но тогда по принципу Дирихле в одном из матчей на этом пути играли игроки (вершины некоторого ребра), рейтинги которых отличались не менее чем на (16-1):7>2, т.е. хотя бы один из этих матчей обязательно был неинтересным. Пример ровно на 1 неинтересный матч существует, причём этот неинтересный матч был сыгран в финале. 1-й круг (первыми указаны победители матчей) – 2-1, 4-3, 5-6, 7-8, 10-9, 12-11, 13-14, 15-16; 2-й круг – 4-2, 5-7, 12-10, 13-15; 3-й круг (полуфинал) – 4-5, 12-13; 4-й круг (финал) – 4-12.)**