

**VI Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». III Турнир математических игр.  
2-я игра. «2 капитана». («Бороться и искать, найти и не сдаваться»).**

**Младшая лига. 12 сентября 2010 года**

- 1. (устно)** В треугольнике  $ABC$   $\angle B=20^\circ$ ,  $\angle C=40^\circ$ . Докажите, что сумма длин биссектрисы  $AK$  и стороны  $AB$  равна длине стороны  $BC$ .
- 2. (ответ)** На олимпиаде были даны три задачи А, В и С. 25 школьников решили хотя бы одну задачу. Среди школьников, не решивших задачу А, решивших В, в два раза больше, чем решивших С. Школьников, решивших только задачу А, на одного больше, чем остальных школьников, решивших задачу А. Сколько школьников решили только задачу В, если среди школьников, решивших только одну задачу, половина не решила задачу А?
- 3. (письменно)** В одной из двух банок литр воды, другая пуста. Из первой банки во вторую переливают половину имеющейся там воды, затем из второй в первую — треть имеющейся там воды, потом из первой во вторую — четверть имеющейся там воды и т.д. Сколько воды будет в первой банке после 2011 переливаний?
- 4. (ответ+пример)** В клетках квадрата  $3 \times 3$  расставляются все целые числа от 1 до 9. Рассматриваются все пары соседних по стороне чисел. В каком наименьшем количестве таких пар оба числа взаимно просты? Приведите ответ и пример с указанием всех нужных пар.
- 5. (письменно)** Квадрат разрезали 18 прямыми, из которых 9 параллельны одной стороне квадрата, а 9 — другой, на 100 прямоугольников. Оказалось, что ровно девять из них — квадраты. Докажите, что среди этих квадратов найдутся два равных между собой.
- 6. (письменно)** На шахматную доску поставили 4 короля, не бьющих друг друга. Какое наибольшее количество королей ещё можно гарантированно поставить на доску так, чтобы все поставленные короли не били друг друга?
- 7. (письменно)** Каково наибольшее количество последовательных натуральных чисел таких, что у каждого из них ровно четыре натуральных делителя?
- 8. (устно)** На плоскости даны несколько прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке. Докажите, что все точки пересечения этих прямых можно так раскрасить в три цвета, чтобы две окрашенные точки одной прямой, между которыми нет других окрашенных точек, всегда были разного цвета.
- 9. (письменно)** Можно ли расставить по кругу все натуральные числа от 1 до 2010 так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была равна простому числу?
- 10. (устно)** На сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  взяли соответственно точки  $E$  и  $D$  такие, что  $AP=2 \cdot PD$ ,  $CP=2 \cdot PE$ , где  $P$  — точка пересечения отрезков  $AD$  и  $CE$ . Доказать, что  $AD$  и  $CE$  — медианы треугольника  $ABC$ .
- 11. (устно)** Дан квадрат  $8 \times 8$ . Назовём множество его клеток *чётным*, если в любом столбце и в любой строке лежит чётное число (возможно, 0) клеток этого множества. Найдите минимальное натуральное число  $k$  такое, что у любого множества из  $k$  клеток найдётся непустое чётное подмножество.
- 12. (ответ)** В автобусе ехали взрослые и дети, причём число взрослых относилось к числу детей как 2:3. После того, как четыре пассажира вышли (и никто не вошёл), число взрослых стало относиться к числу детей как 3:4. Сколько пассажиров первоначально ехало в автобусе, если известно, что их было меньше 60?
- 13. (письменно)**  $a, b, c$  — такие натуральные числа, что  $ab+2b+4$  и  $bc+2c+4$  делятся на 2010. Докажите, что тогда и число  $ca+2a+4$  тоже делится на 2010.
- 14. (ответ+пример)** Расстоянием между двумя клетками шахматной доски назовём минимальное число ходов в пути коня между этими клетками. Какое наибольшее количество клеток можно отметить на доске так, чтобы расстояние между любыми двумя отмеченными клетками было равно 2? Приведите ответ и пример.
- 15. (письменно)** Можно ли в разбитом на треугольные клетки правильном шестиугольнике (см. рис.) закрасить несколько клеток так, чтобы у каждой незакрашенной (белой) клетки были ровно две закрашенные (чёрные) соседки (по стороне), а у каждой чёрной клетки были ровно две белые соседки?
- 16. (ответ)** Решите систему уравнений:  $ab=3c$ ,  $bc=5a$ ,  $ac=7b$ .

