

VI Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». III Турнир математических игр.  
2-я игра. «2 капитана». («Бороться и искать, найти и не сдаваться»).

*Старшая лига. 12 сентября 2010 года*

- 1. (устно)** На сторонах  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  треугольника  $ABC$  взяты точки  $C'$ ,  $A'$  и  $B'$  так, что они делят стороны в отношении  $1:2$  считая от вершин  $A$ ,  $B$  и  $C$  соответственно. Отрезки  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$  при пересечении образуют треугольник  $PNK$ , у которого  $M$  – точка пересечения медиан ( $P$ ,  $N$  и  $K$  – ближайшие к  $A$ ,  $B$  и  $C$  точки пересечения на отрезках  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$  соответственно). Докажите, что треугольники  $MPN$ ,  $MNK$  и  $MKP$  равновелики треугольникам  $AC'P$ ,  $BA'N$  и  $CB'K$ .
- 2. (ответ)** На олимпиаде были даны три задачи  $A$ ,  $B$  и  $C$ . 25 школьников решили хотя бы одну задачу. Среди школьников, не решивших задачу  $A$ , решивших  $B$ , в два раза больше, чем решивших  $C$ . Школьников, решивших только задачу  $A$ , на одного больше, чем остальных школьников, решивших задачу  $A$ . Сколько школьников решили только задачу  $B$ , если среди школьников, решивших только одну задачу, половина не решила задачу  $A$ ?
- 3. (письменно)** В треугольнике  $ABC$  с  $\angle C=60^\circ$  точки  $O$  и  $I$  – центры описанной и вписанной окружностей соответственно, точка  $M$  – середина дуги  $AB$  описанной около треугольника окружности. Докажите, что  $MI$  равен радиусу этой описанной окружности.
- 4. (ответ+пример)** В клетках квадрата  $3 \times 3$  расставляются все целые числа от 1 до 9. Рассматриваются все пары соседних по стороне чисел. В каком наименьшем количестве таких пар оба числа взаимно просты? Приведите ответ и пример с указанием всех нужных пар.
- 5. (письменно)**  $BD$  – биссектриса треугольника  $ABC$ , точки  $O$ ,  $O_1$  и  $O_2$  – центры вписанных окружностей треугольников  $ABC$ ,  $ABD$  и  $BCD$  соответственно, а точки  $P$ ,  $P_1$  и  $P_2$  – соответствующие проекции этих центров на сторону  $AC$ . Докажите, что  $P_1D=PP_2$ .
- 6. (письменно)** На шахматную доску поставили 4 короля, не бьющих друг друга. Какое наибольшее количество королей ещё можно гарантированно поставить на доску так, чтобы все поставленные короли не били друг друга?
- 7. (ответ)** Сумма чисел  $x$  и  $y$  равна 1. Найдите наибольшее значение выражения  $x^4+y^4$ .
- 8. (устно)** На плоскости даны несколько прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке. Докажите, что все точки пересечения этих прямых можно так раскрасить в три цвета, чтобы две окрашенные точки одной прямой, между которыми нет других окрашенных точек, всегда были разного цвета.
- 9. (письменно)** Можно ли расставить по кругу все натуральные числа от 1 до 2010 так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была равна простому числу?
- 10. (устно)** Две правильные пирамиды, четырёхугольную и треугольную, склеили по треугольной грани. Известно, что длины всех рёбер пирамид между собой равны. Сколько граней у получившегося многогранника?
- 11. (устно)** Дан квадрат  $n \times n$ . Назовём множество его клеток *чётным*, если в любом столбце и в любой строке лежит чётное число (возможно, 0) клеток этого множества. Найдите минимальное натуральное число  $k$  такое, что у любого множества из  $k$  клеток найдётся непустое чётное подмножество.
- 12. (письменно)** Найдите  $\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5}$ .
- 13. (письменно)**  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – такие натуральные числа, что  $ab+2b+4$  и  $bc+2c+4$  делятся на 2010. Докажите, что тогда и число  $ca+2a+4$  тоже делится на 2010.
- 14. (ответ)** Сколькими способами можно расставить все натуральные числа от 1 до 20 в клетках прямоугольника  $2 \times 10$  так, чтобы любые два числа, различающиеся на 1, всегда попадали бы в клетки с общей стороной?
- 15. (письменно)** Докажите, что уравнение  $(x+y\sqrt{5})^4+(z+t\sqrt{5})^4=2+\sqrt{5}$  не имеет решений в рациональных числах.
- 16. (письменно)** Существует ли равнобедренный треугольник, отличный от равностороннего, в котором отношение длин сторон равно отношению величин противолежащих им углов?