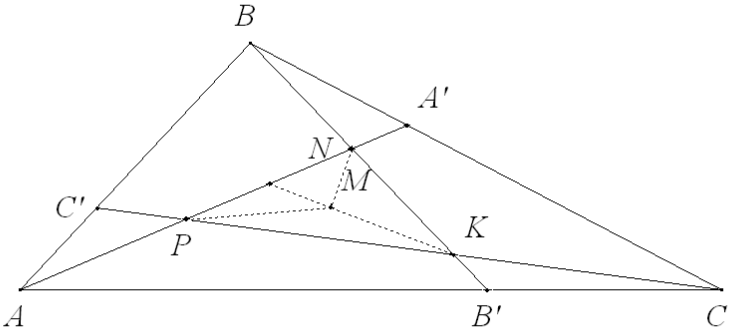
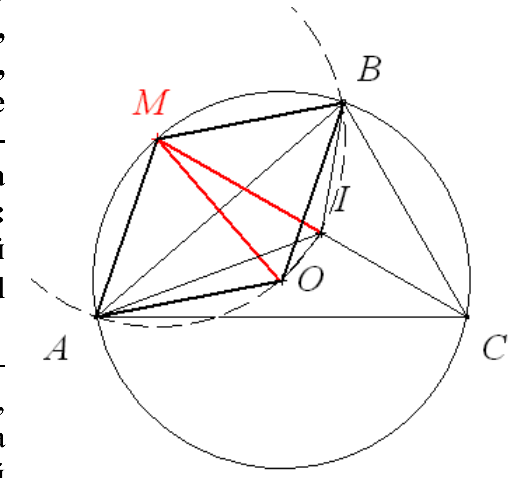
VI Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». III Турнир математических игр.
2-я игра. «2 капитана». («Бороться и искать, найти и не сдаваться»).
Старшая лига*. Решения. *12 сентября 2010 года

1. (устно) На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты точки C', A' и B' так, что они делят стороны в отношении 1:2 считая от вершин A, B и C соответственно. Отрезки AA', BB' и CC' при пересечении образуют треугольник PNK, у которого M – точка пересечения медиан (P, N и K – ближайшие к A, B и C точки пересечения на отрезках AA', BB' и CC' соответственно). Докажите, что треугольники MPN, MNK и MKP равновелики треугольникам $AC'P$, $BA'N$ и $CB'K$.



(Рассмотрим систему материальных точек $1A$, $4B$ и $2C$, тогда барицентр этой системы будет лежать одновременно на отрезке BB' (B' – барицентр пары точек $1A$ и $2C$ в силу правила рычага) и на отрезке AA' (A' – барицентр пары точек $4B$ и $2C$), т.е. в точке N, и будет делить этот отрезок по правилу рычага в отношении $AN:NA'=6:1$. Аналогично рассуждая с системой материальных точек $4A$, $2B$ и $1C$, получим, что точка P будет её барицентром и $AP:PA'=3:4$. Тогда $AP=PN=3NA'$. Аналогичные отношения будут на отрезках BB' и CC'. Заметим, что в силу свойств точки пересечения медиан треугольника площади треугольников MPN, MNK и MKP равны между собой и равны трети площади треугольника PNK, и при этом равны площадям треугольников $AC'P$, $BA'N$ и $CB'K$, что следует в силу равенств, например, $AP=PN$ и $C'P=PK/3$.)

2. (ответ) На олимпиаде были даны три задачи А, В и С. 25 школьников решили хотя бы одну задачу. Среди школьников, не решивших задачу А, решивших В, в два раза больше, чем решивших С. Школьников, решивших только задачу А, на одного больше, чем остальных школьников, решивших задачу А. Сколько школьников решили только задачу В, если среди школьников, решивших только одну задачу, половина не решила задачу А? **(6 человек. Пусть a, b, c – количества школьников, решивших по одной задаче (А, В и С соответственно); x, y, z – количества школьников, решивших ровно по две задачи (не решивших А, В и С соответственно); t – количество школьников, решивших все три задачи. Тогда по условию получим систему из четырёх уравнений: $a+b+c+x+y+z+t=25$, $b+x=2(c+x)$, $a=y+z+t+1$, $a=b+c$. Из этой системы получим, что $b=2c+x$ и $4b+c=26$. Значит, $c\equiv2 \pmod 4$) и по крайней мере в два раза меньше b. Тогда $c=2$, $b=6$.)**



3. (письменно) В треугольнике ABC с $\angle C=60°$ точки O и I – центры описанной и вписанной окружностей соответственно, точка M – середина дуги AB описанной около треугольника окружности. Докажите, что MI равен радиусу этой описанной окружности. **(Т.к. $\angle C=60°$, значит, центральный угол $\angle AOB=2\angle ACB=120°$. Кроме того, биссектриса $\angle C$ проходит через точки I и M, тогда $AM=MB$ и $AMBO$ – ромб с углами 60° и 120°. Подсчёт углов ($\angle AIB=180°-(\angle BAC+\angle ABC)/2=180°-(180°-\angle BCA)/2=180°-60°=120°$, при этом $\angle AOB$ также равен 120°) показывает, что центр вписанной окружности I будет лежать на окружности, описанной около ΔAOB, т.е. на окружности с центром в точке M и радиусом MO. Значит, $MI=MO$ – радиусу описанной окружности ΔABC.)**

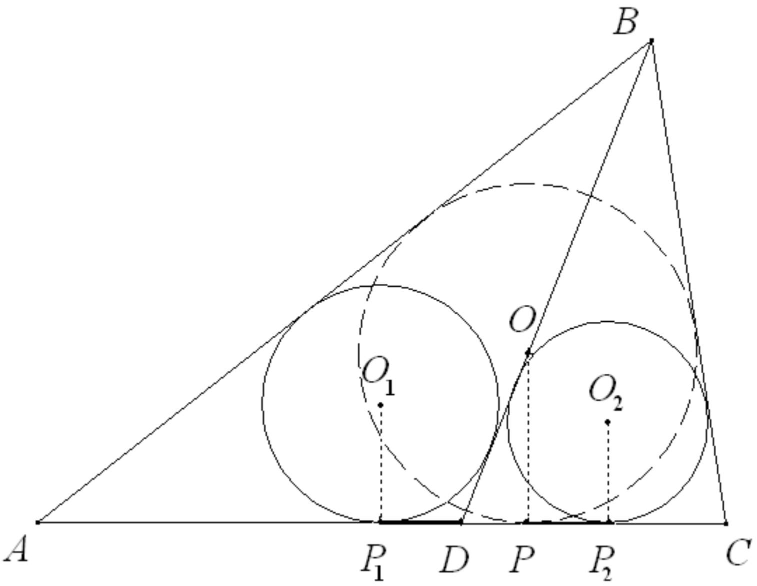
4. (ответ+пример) В клетках квадрата 3×3 расставляются все целые числа от 1 до 9. Рассматриваются все пары соседних по стороне чисел. В каком наименьшем количестве таких пар оба числа взаимно просты? Приведите ответ и пример с указанием всех нужных пар.

2	8	9
4	6	3
1	5	7

(6 пар взаимно простых чисел. Всего существует два множества не взаимно простых чисел – кратные 2 (2, 4, 6, 8) и кратные 3 (3, 6, 9). Числа первого множества могут нам дать максимум 4 пары не взаимно простых (если стоят по кругу в квадрате 2×2), числа второго множества дадут нам максимум две таких пары (т.к. все трое не могут между собой соседствовать). Значит, не более 4+2=6 пар не взаимно простых и не

менее 12–6=6 пар взаимно простых чисел. Пример на 6 таких пар см. на рис. – перегородки между числами таких пар жирно выделены.)

5. **(письменно)** BD – биссектриса треугольника ABC, точки O, O_1 и O_2 – центры вписанных окружностей треугольников ABC, ABD и BCD соответственно, а точки P, P_1 и P_2 – соответствующие проекции этих центров на сторону AC. Докажите, что $P_1D=PP_2$. **(Заметим, что точки проекций являются точками касаний соответствующих вписанных окружностей (см. рис.). Воспользуемся свойством отрезков касательных от вершин до точек касания, длины которых равны половине суммы двух сторон, на которых они лежат, за вычетом третьей стороны. Тогда** $P_1D = \dfrac{BD+DA-AB}{2}$**,**



$$PP_2 = PC - P_2C = \frac{BC+CA-AB}{2} - \frac{BC+CD-DB}{2} = \frac{BD+(CA-CD)-AB}{2} = \frac{BD+DA-AB}{2} = P_1D,$$ **что и требовалось доказать.)**

6. **(письменно)** На шахматную доску поставили 4 короля, не бьющих друг друга. Какое наибольшее количество королей ещё можно гарантированно поставить на доску так, чтобы все поставленные короли не били друг друга? **(7 королей. Приведём контрпример, когда более 7 дополнительных королей поставить нельзя. Поставим королей на клетки *b*2, *b*5, *e*2 и *e*5 (см. рис.1), тогда они побьют зону в виде квадрата 6×6, за пределами которой оставшиеся доступные для других королей поля разбиваются только на 7 квадратов 2×2, в каждый из которых можно поставить не более 1 короля. Значит, на доску можно будет дополнительно поставить не более 7 королей. Докажем теперь, что при любой начальной расстановке 4 королей на доску всегда можно поставить ещё хотя бы 7 королей. Заметим, что каждый из 4 поставленных королей сделал запретными для постановки других королей не более 9 клеток в виде квадрата 3×3 вокруг себя. Значит, 4 короля делают запретными не более 4·9=36 клеток, и не менее 64–36=28 клеток являются доступными для постановки дополнительных королей. Раскрасим всё поле в четыре цвета квадратами 2×2 (см. рис. 2). Тогда по принципу Дирихле из 28 доступных клеток не менее 7 будут одного из цветов. Поставим королей на все доступные клетки этого цвета. Эти поставленные короли (не менее 7 штук) вместе с 4-мя уже стоящими образуют набор королей, не бьющих друга.)**

8		к		к		к		к
7								
6								к
5		к			к			
4								к
3								
2		к			к			к
1								
	a	b	c	d	e	f	g	h

рис. 1

8	1	2	1	2	1	2	1	2
7	4	3	4	3	4	3	4	3
6	1	2	1	2	1	2	1	2
5	4	3	4	3	4	3	4	3
4	1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4	3
2	1	2	1	2	1	2	1	2
1	4	3	4	3	4	3	4	3
	a	b	c	d	e	f	g	h

рис. 2

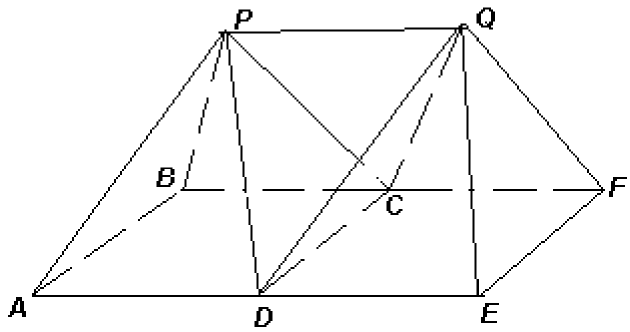
7. **(ответ)** Сумма чисел x и y равна 1. Найдите наибольшее значение выражения xy^4+x^4y. **(1/12. $xy^4+x^4y = xy(x^3+y^3) = xy(x+y)(x^2-xy+y^2) = xy(x+y)((x+y)^2-3xy) = xy(1-3xy)$. Положим $3xy = t$. Тогда $xy^4+x^4y = t(1-t)/3$. Произведение $t(1-t)$ достигает максимального значения 1/4 при $t = 1/2$, то есть при $xy = 1/6$. xy^4+x^4y в этом случае равно 1/12. Такое возможно, ибо $xy = 1/6 \Leftrightarrow x(1-x) = 1/6$, а данное квадратное уравнение имеет решение).**

8. **(устно)** На плоскости даны несколько прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке. Докажите, что все точки пересечения этих прямых можно так раскрасить в три цвета, чтобы две окрашенные точки одной прямой, между которыми нет других окрашенных точек, всегда

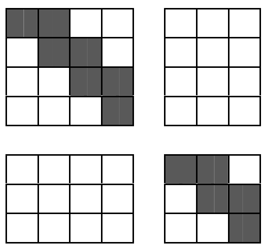
были разного цвета. (**Возьмём вспомогательную прямую l, не параллельную ни одной из прямых, соединяющих точки пересечения данных прямых, так, чтобы все точки пересечения данных прямых лежали с одной стороны от нее. Пронумеруем точки пересечения данных прямых в порядке их удаленности от прямой l: ближайшей присвоим номер 1, второй по удалённости – номер 2 и т.д. Покрасим первую точку в любой из трёх цветов, а затем будем красить остальные точки в порядке возрастания их номеров, следя за тем, чтобы очередная точка не была покрашена в тот же цвет, что какая-нибудь из уже окрашенных соседних с ней (на одной из данных прямых) точек. Из способа нумерации точек следует, что на каждой из данных прямых точки пересечения её с другими данными идут в порядке возрастания номеров. Поскольку в каждой такой точке пересекаются только две прямые, каждая точка в момент её окраски соседствует не более чем с двумя уже окрашенными. Поэтому мы всегда сможем покрасить её с соблюдением условия задачи.**)

9. (**письменно**) Можно ли расставить по кругу все натуральные числа от 1 до 2010 так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была равна простому числу? (***1 решение*: Воспользуемся тем, что числа 2027 и 2029 – простые. Начнём по кругу ставить все числа от 17 до 2010 так, чтобы пара соседей давала в сумме 2027 и 2029, а в конце поставим числа от 1 до 16 с соблюдением условия: 17, 2010, 19, 2008, 21, 2006, 23, 2004, …, 2007, 20, 2009, 18, 1, 12, 5, 2, 3, 4, 7, 10, 9, 8, 11, 6, 13, 16, 15, 14. *2 решение*: Воспользуемся тем, что числа 2011 и 2017 – простые. Разобьём числа на три группы по модулю 6 (остатки 1 и 3, остатки 5 и 2, остатки 3 и 4), где в каждой группе соседи в сумме дают 2011 или 2017. На стыках групп стоят маленькие числа, которые также в парах в сумме дают простые числа: (1, 2010, 7, 2004, 13, 1998, …, 2005, 6), (5, 2006, 11, 2000, 17, 1994, …, 2009, 2), (3, 2008, 9, 2002, …, 2007, 4).**)

10. (**устно**) Две правильные пирамиды, четырёхугольную и треугольную, склеили по треугольной грани. Известно, что длины всех рёбер пирамид между собой равны. Сколько граней у получившегося многогранника? (**5 граней. «Поставим рядом» две одинаковые четырёхугольные пирамиды *PABCD* и *QCDEF* с равными ребрами (см. рис.). Так как прямая *PQ* параллельна прямой, проходящей через центры оснований пирамиды, то *PQ* || *AD* и *PQ* || *BC*, значит, точка *Q* принадлежит плоскостям *PAD* и *PBC*. Так как длина отрезка *PQ* равна стороне основания пирамиды *PABCD*, то *PQCD* – правильная треугольная пирамида с такой же длиной всех рёбер. Таким образом, получившийся многогранник *PABCDQ* имеет пять граней.**)



11. (**устно**) Дан квадрат $n \times n$. Назовём множество его клеток *чётным*, если в любом столбце и в любой строке лежит чётное число (возможно, 0) клеток этого множества. Найдите минимальное натуральное число k такое, что у любого множества из k клеток найдётся непустое чётное подмножество. (**2*n*. Если клеток будет меньше 2*n*, то в качестве контрпримера можно привести соответствующий начальный кусок закрашенной на рисунке ломаной. Тогда в любом чётном подмножестве не должно быть первой клетки, затем второй и т.д., т.е. чётное подмножество будет пустым – противоречие. Докажем, что в любом множестве из 2*n* клеток найдётся непустое чётное подмножество. Рассмотрим двудольный граф, в котором строки и столбцы являются вершинами двух долей (по *n* вершин), а клетки рассматриваемого множества – рёбра этого графа, соединяющие соответствующие вершину-строку и вершину-столбец, в которых находится клетка-ребро. Т.к. количество рёбер (2*n*) равно количеству вершин, то этот граф не является деревом или лесом, значит, в нём есть цикл, который и даст нам нужное непустое чётное подмножество.**)



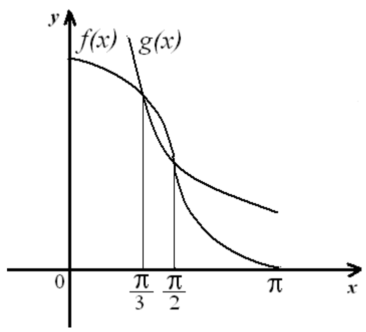
12. (письменно) Найдите $\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}$. ($\frac{1}{2}$. $\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}=\frac{2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}+2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{3\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}}=$

$=\frac{\sin\frac{2\pi}{5}-\sin\frac{2\pi}{5}+\sin\frac{4\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)}{2\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{1}{2}$)

13. (письменно) *a, b, c* – такие натуральные числа, что $ab+2b+4$ и $bc+2c+4$ делятся на 2010. Докажите, что тогда и число $ca+2a+4$ тоже делится на 2010. (**Число $c(ab+2b+4)$–$2(bc+2c+4)=abc-8=b(ca+2a+4)-2(ab+2b+4)$ делится на 2010, тогда и число $b(ca+2a+4)$ делится на 2010. Число b взаимно просто с числом 2010 (это видно из 1-го условия), значит, на 2010 делится число $ca+2a+4$. *Комментарий:* На самом деле перед нами неверное рассуждение, правильным решением задачи является указание на некорректность условия с приведением контр-примера. Например, при $a=1001$, $b=2$, $c=2009$ числа $ab+2b+4=2010$ и $bc+2c+4=8040$ удовлетворяют условию, а нечётное число $ca+2a+4$ не делится на 2010. Верным является только наличие делимости на 1005.)**

14. (ответ) Сколькими способами можно расставить все натуральные числа от 1 до 20 в клетках прямоугольника 2×10 так, чтобы любые два числа, различающиеся на 1, всегда попадали бы в клетки с общей стороной? (**2·10·9+4=184. Воспользуемся методом рекуррентных последовательностей. Пусть a_n – количество способов в прямоугольнике $2\times n$, в которых последний столбец состоит из пары $(1, 2n)$, где $n\geq 2$; b_n – из пары $(k, k+1<2n)$; c_n – из пары (1, 2); d_n – из пары $(2n-1, 2n)$; $S_n=2(a_n+b_n+c_n+d_n)$ – количество всех способов в прямоугольнике $2\times n$, т.к. для каждой возможной пары в конце прямоугольника 2 способа расположения. Тогда $a_2=b_2=c_2=d_2=1$; $a_{n+1}=a_n=1$, $c_{n+1}=c_n+a_n=n-1$, $d_{n+1}=d_n+a_n=n-1$, $b_{n+1}=b_n+c_n+d_n$. Нетрудно доказать, что $b_{n+1}=n^2-n+1$. Значит, $S_n=2(a_n+b_n+c_n+d_n)=2(a_n+b_{n+1})=2(1+n^2-n+1)=2n(n-1)+4$. По этой формуле и найдём нужное нам число способов при $n=10$.)**

15. (письменно) Докажите, что уравнение $(x+y\sqrt{5})^4+(z+t\sqrt{5})^4=2+\sqrt{5}$ не имеет решений в рациональных числах. (**Если данное уравнение имеет решение в рациональных числах, то решение в рациональных числах будет иметь и уравнение с сопряжёнными выражениями $(x-y\sqrt{5})^4+(z-t\sqrt{5})^4=2-\sqrt{5}$, но это уравнение не имеет решений, т.к. слева стоит неотрицательное число, а справа – отрицательное.)**



16. (письменно) Существует ли равнобедренный треугольник, отличный от равностороннего, в котором отношение длин сторон равно отношению величин противолежащих им углов? (**Не существует. Предположим, что такой треугольник со сторонами a, a, b ($a\neq b$) и углами α, α, $\beta=\pi-2\alpha$ существует. Тогда по теореме синусов получаем, что $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{b}{\sin(\pi-2\alpha)}=\frac{b}{\sin 2\alpha}=\frac{b}{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$ (здесь воспользовались также свойствами тригонометрических функций). Отсюда с учётом требуемого в условии отношения имеем, что $2\cos\alpha=\frac{b}{a}=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\pi-2\alpha}{\alpha}=\frac{\pi}{\alpha}-2$, тогда равенство $2(\cos\alpha+1)=\frac{\pi}{\alpha}$ должно выполняться при нашем α из интервала $(0;\frac{\pi}{2})$. Рассмотрим графики функций $f(x)=2(\cos x+1)$ и $g(x)=\frac{\pi}{x}$. Они пересекаются в точках $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{2}$, при этом на интервале $(0;\frac{\pi}{2})$ первая функция выпукла вверх, в вторая – вниз, значит, на этом интервале у них единственная точка пересечения $x=\frac{\pi}{3}$ (см. чертёж). Следовательно, равенство $2(\cos\alpha+1)=\frac{\pi}{\alpha}$ на интервале $(0;\frac{\pi}{2})$ выполняется только при $\alpha=\frac{\pi}{3}$, что соответствует равностороннему треугольнику. Противоречие.)**