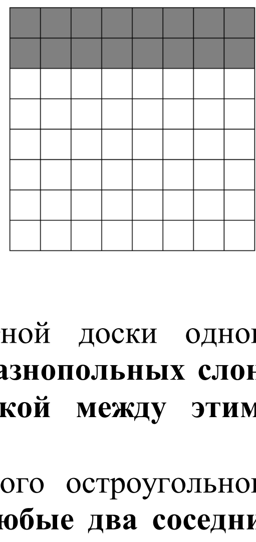
VI Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». III Турнир математических игр.

1-я игра. «Домино»**.** ***<u>Младшая лига (7-9 класс).</u>*** **<u>Решения</u>*. 11 сентября 2010 года***

0–0. Найдите количество решений ребуса: **Д×В×А×П×Я×Т×Ь=Д×Е×С×Я×Т×Ь**. *(Одинаковые буквы – одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры). Ответ дать числом в десятичной записи.* **(1453824. В ребусе 9 различных букв, 4 из них (Д, Я, Т, Ь) встречаются в обеих частях равенства, а 5 только в одной из них (В, А, П, Е, С). Выясним, сколько есть решений, когда одна из букв равна 0. В этом случае она должна встречаться и в левой, и в правой части, т.е. это одна из букв Д, Я, Т, Ь (4 способа). А для остальных восьми букв выбираем 8 значений цифр из 9 оставшихся – а это 9·8·…·3·2 = 9! способов. Таким образом, случай с наличием нуля даёт 4·9!=1451520 решений. Если же нуля нет, то используются все 9 ненулевых цифр, при это В×А×П=Е×С≠0. В этих произведениях не должно быть 5 и 7, т. к. эти простые числа не являются делителями других ненулевых цифр. Кроме того, произведение пяти этих цифр (взятых из 7 оставшихся ненулевых цифр) должно быть полным квадратом. Перебрав всевозможные варианты, получим 8 подходящих: 1·2·9=3·6, 1·3·6=2·9, 2·3·6=4·9, 3·4·6=8·9, 1·4·6=3·8, 1·3·8=4·6, 1·2·6=3·4, 1·3·4=2·6. Учитывая, что цифры левой части можно переставлять 3!=6 способами, правой – 2!=2 способами, а четыре оставшиеся ненулевые цифры на местах Д, Я, Т, Ь можно переставлять 4!=24 способами, то случай без нуля даёт 4!·3!·2!·8=2304 решения. А вместе имеем 1453824 решения.)**

0–1. Сколько граней у нового незаточенного шестигранного карандаша? **(8 граней, т.к. он является шестигранной призмой и имеет ещё две небоковые грани – верхнюю и нижнюю)**

0–2. В течение дня в настольный теннис играли 11 школьников. Каждый из них выиграл хотя бы одну партию ровно у k других школьников. При каком наименьшем k можно утверждать, что обязательно найдутся два школьника, которые выиграли друг друга? **(*k*=6. Рассмотрим орграф, в котором вершины – школьники, а рёбра-стрелки – победы. Тогда количество пар вершин равно** $C_{11}^{2}=\frac{11\cdot 10}{2}=55$**. Значит, при *k*=6 будет 66 стрелок (победителей в парах) и по принципу Дирихле найдётся пара вершин, между которыми будут стрелки в обе стороны, т.е. пара школьников, обыгравших друг друга. При *k*≤5 существует контр-пример, в котором разместим школьников по кругу, и каждый выиграл у *k* школьников, идущих за ним по часовой стрелке. Тогда не найдётся нужная нам пара.)**



0–3. Сколькими способами можно поставить в соседние клетки шахматной доски одного чернопольного слона и одного белопольного слона? **(112 способов. Эти 2 разнопольных слона образуют доминошку, а каждая доминошка определяется перегородкой между этими клетками. Всего на доске 2·8·7=112 перегородок.)**

0–4. Отметьте 16 клеток шахматной доски так, чтобы не нашлось ни одного остроугольного треугольника с вершинами в центрах отмеченных клеток. (**Можно взять любые два соседних ряда доски – см. рис.)**

0–5. Назовём девятизначное число *разноцветным*, если оно состоит из 9 различных ненулевых цифр. Найдите два разноцветных числа, сумма которых также является разноцветной. Приведите получившееся равенство. **(например, 123 456 789 + 864 197 532 = 987 654 321)**

0–6. Найдите наибольшее натуральное число, не превосходящее 2010, равное произведению цифр некоторого натурального числа. (**2000=2^4·5^3 равно произведению цифр числа 2222555, остальные числа до 2010 делятся на простое число, содержащее не менее двух цифр: 2010□67, 2009□41, 2008□251, 2007□223, 2006□17, 2005□401, 2004□167, 2003□2003, 2002□11, 2001□23.)**

1–1. Укажите наименьшее нечётное число, имеющее нечётное количество целых делителей. **(Такого числа нет, т.к. у каждого целого ненулевого числа (нечётное число не равно 0) чётное количество целых делителей, т.к. делители разбиваются на пары противоположных по знаку чисел.)**

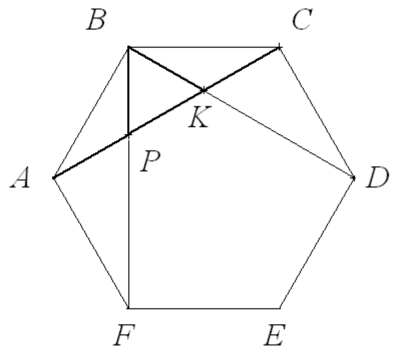
1–2. Сколько существует шестизначных чисел, произведение цифр которых равно 6? ($36=6+A_6^2=6+30$**, т.к. это либо числа с одной 6 и пятью 1 (всего 6 чисел), либо числа с одной 2, одной 3 и четырьмя 1 (всего их – количество размещений из 6 по 2 –** $A_6^2=6\cdot 5=30$ **).)**

1–3. Какое наибольшее число слонов (на доске должны быть слоны обоих цветов – чёрного и белого) можно расставить на шахматной доске так, чтобы чёрные не били белых, а белые – чёрных? Приведите ответ и пример. **(64 слона, например, чёрные – на чёрном цвете, а белые – на белом)**

1–4. Про четырёхзначное число N с различными цифрами известно, что числа 1234, 5678, 9012, 3456, 7890 содержат ровно по две цифры, принадлежащие этому числу, однако ни одна из них не стоит на том же месте, что и в числе N. Найдите все возможные значения N. (**Такого числа не существует, т.к. каждая цифра встречается всего два раза, значит, наши четыре цифры из числа N встретятся в других числах 8 раз, а должны в этих пяти числах встретиться 10 раз.)**

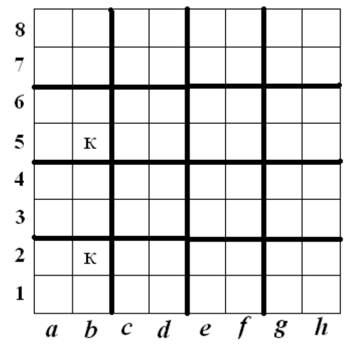
1–5. Найдите наибольшее натуральное число, на которое выражение $n(n^2–49)(n^2+49)$ делится при любом натуральном n. **(30. Пусть $a_n = n(n^2–49)(n^2+49)$, тогда $a_1= –48·50= –2^5·3·5^2$, $a_2= –2·45·53 = = –2·3^2·5·53$, НОД($a_1$, a_2)=30, значит, наибольший общий делитель всех этих чисел не превосходит 30. Перебором остатков по каждому из трёх модулей нетрудно показать, что a_n делится и на 2, и на 3, и на 5, значит, $a_n ⋮ 30$ при любом натуральном n.)**

1–6. Найдите наибольшее натуральное число из различных цифр, в котором любые две подряд идущие цифры образуют двузначное число, делящееся на 3. **(875421. Для выполнения признака делимости на 3 соседние цифры либо обе делятся на 3, тогда это число не более 9630, либо их остатки (1 и 2, которые встречаются по 3 раза) при делении на 3 дополняют друг друга, т.е. чередуются, тогда это число не более чем 6-значное, а наибольшим таким число будет 875421.)**



2–2. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ диагонали AC и BF пересекаются в точке P. Найдите отношение $AP:PC$. **(1:2. Подсчёт углов показывает, что $AP=PB=BK=PK=KC$, где K – точка пересечения диагоналей AC и BD, значит, $PC=2AP$.)**

2–3. Найдите все пары натуральных чисел (a, b), для которых число 2^a+3^b – точный квадрат. **(a=4, b=2. Квадрат не может давать остаток 2 при делении на 3, поэтому a – чётно, т.е. $a=2m$, где m – натуральное число. Квадрат не может давать остаток 3 при делении на 4, поэтому b – чётно, т.е. $b=2n$, где n – натуральное число. Тогда $2^{2m}=k^2–3^{2n}=(k–3^n)(k+3^n)$. Каждый множитель – степень двойки, но их разность $2·3^n$ делится на 2, но не делится на 4, поэтому $k–3^n=2$, $k+3^n=2^{2m–1}$. Отсюда $3^n+1=2^{2m–2}$. Нетрудно проверить, что 3^n+1 не делится на 8, поэтому $2m–2≤2$, т.е. $m≤2$, откуда далее и следует ответ.)**



2–4. Поставьте на шахматную доску двух не бьющих друг друга королей так, чтобы после этого нельзя было поставить на доску 16 королей, не бьющих друг друга. (**Поставим королей на клетки b2 и b5. Докажем, что на доску теперь можно поставить максимум 15 королей так, чтобы все поставленные короли не били друг друга. Разобьём доску на 16 квадратов 2×2 (см. рис.). Тогда в каждый квадрат можно поставить не более одного короля, при этом во второй снизу квадрат у левого края поставить короля нельзя, т.к. все его клетки уже побиты двумя поставленными королями. Значит, на доску теперь можно поставить не более 15 не бьющих друг друга королей.)**

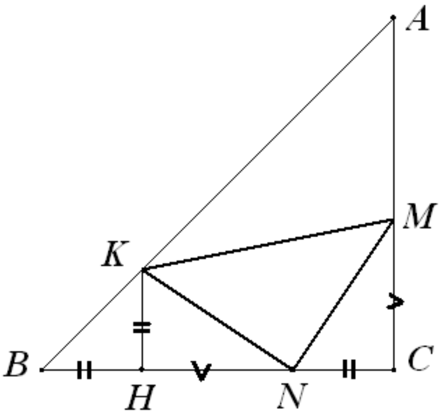
15	**3**	**12**
5	**1**	**4**
10	**2**	**8**

2–5. Во всех клетках квадрата 3×3 расставляются различные натуральные числа от 1 до N так, что в каждой паре соседних по стороне чисел одно делится на другое. При каком наименьшем N такое возможно? Приведите ответ и пример расстановки чисел. **(15, пример – на рисунке. Перебором можно доказать, что при $N≤14$ в таблице невозможно разместить числа 5, 10, 7, 14, 11, 13, значит, не все клетки будут заняты.)**

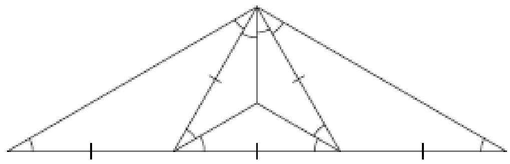
2–6. Найдите наибольшее десятизначное число, в котором любые две подряд идущие цифры образуют двузначное число, делящееся на 6. **(9666666666)**

3–3. Сколько существует десятизначных чисел, кратных 3, в записи которых могут быть использованы только цифры 1, 2 и 3? **(3^9=19683. Каждая из первых девяти цифр может быть выбрана 3 способами, а последняя цифра определяется однозначно в зависимости от остатка при делении на 3 суммы первых девяти цифр.)**

3–4. Внутри катета *BC* прямоугольного равнобедренного треугольника *ABC* (*AC*=*BC*) найдите все такие положения точки *N*, что существует прямоугольный равнобедренный треугольник *KMN* с гипотенузой *KM*, концы которой лежат (внутри) на сторонах *AB* и *AC* исходного треугольника. (***N*** **может быть любой точкой между *C* и серединой катета *BC*. Пусть *H* – проекция на катет *BC* точки *K*, лежащей на гипотенузе *AB* (см. рис.). Т.к. $\angle KNM$=90°, то точка *H* лежит между *B* и *N*. Треугольник *BKH* – прямоугольный равнобедренный, треугольники *KNH* и *NMC* равны (по гипотенузе и прилежащим углам). Значит, *BH*=*HK*=*NC*, т.е. точки *H* и *N* симметричны относительно середины отрезка BC. Заметим при этом, что для любого положения точки *N* между *C* и серединой *BC* из наших рассуждений следует алгоритм построения сначала точки *H* (центрально симметричной точке *N* относительно середины катета *BC*), затем *K* и *M*, значит, соответствующий равнобедренный прямоугольный треугольник *KMN* будет существовать.)**



3–5. Разбейте какой-нибудь непрямоугольный треугольник на 5 треугольников, подобных исходному. **(например, равнобедренный треугольник с углом 120° разбивается на пять подобных ему)**

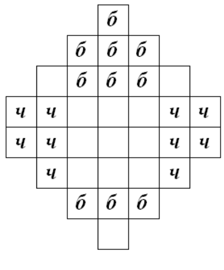


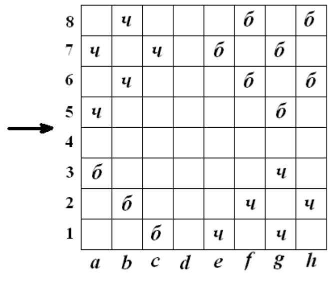
3–6. Укажите множество значений, которые может принимать выражение 1–2–3+4+5–6–7+8+…±*n*, где последний знак зависит от натурального числа *n*≥5, а минусы и плюсы чередуются парами. **(Все неположительные целые числа, кратные 4, кроме (–4); все натуральные числа, сравнимые с 1 по модулю 4 и большие 1, и (–1). Сгруппируем все члены, кроме одного-трёх последних в зависимости от *n*, в четвёрки: (1 – 2 – 3 + 4) + (5 – 6 – 7 + 8) + …. Поскольку значения всех выражений в скобках равны 0, то значение выражения зависит от числа *n*. Вся сумма будет равна 0, если $n\equiv 0(mod\ 4)$; *n*, если $n\equiv 1(mod\ 4)$; –1, если $n\equiv 2(mod\ 4)$; –1–*n*, если $n\equiv 3(mod\ 4)$.)**

4–4. В правильном треугольнике со стороной, равной 6, на одной из сторон взята точка на расстоянии 1 от ближайшей вершины. Найдите расстояние от этой точки до центра треугольника. **($\sqrt{7}$. Это расстояние найдём по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника с катетами 2 и $\sqrt{3}$ (радиус вписанной окружности).)**

4–5. Строки квадратной таблицы размером 2011×2011 занумеровали различными целыми числами (не обязательно идущими подряд). Теми же числами занумеровали её столбцы. После этого в каждой клетке таблицы записали сумму номеров её строки и столбца. Каких чисел (чётных или нечётных) в клетках таблицы могло быть записано больше и на сколько? **(Чётных чисел больше на k^2, где *k* – нечётное натуральное число от 1 до 2011. Пусть при нумерации строк (и соответственно столбцов) было использовано *n* чётных чисел и 2011–*n* нечётных чисел, тогда в клетках окажется $n^2+(2011-n)^2$ чётных чисел и $2n(2011-n)$ нечётных чисел, но разность этих полученных чисел равна $(n-(2011-n))^2=(2n-2011)^2$ и может быть полным квадратом любого нечётного натурального числа, не превосходящего 2011.)**

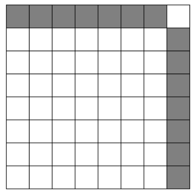
4–6. При каком наибольшем *N* на чёрных клетках шахматной доски можно расставить *N* чёрных и *N* белых слонов так, чтобы чёрные слоны не били белых, а белые – чёрных? Приведите ответ и пример. **(10. Сначала рассмотрим доску из 32 клеток, на которой слон фактически является ладьёй. После этого построим соответствующий пример уже на шахматной доске.)**



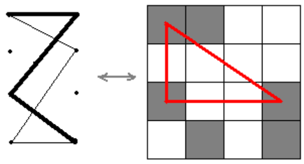


5–5. Найдите наименьшее λ такое, что неравенство $a+b+c\le\lambda$ выполняется для любых неотрицательных чисел *a*, *b* и *c*, сумма квадратов которых равна 1. **($\sqrt{3}$. Из неравенства между средним арифметическим и средним квадратическим** $\frac{a+b+c}{3}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$ **следует, что**

$a+b+c \le \sqrt{3}$**, при этом значение** $\sqrt{3}$ **достигается при значениях переменных, равных** $\frac{1}{\sqrt{3}}$**, значит, наименьшее возможное значение для** λ **равно** $\sqrt{3}$ **.)**



5–6. Какое наибольшее количество клеток шахматной доски можно отметить так, чтобы не нашлось ни одного прямоугольного треугольника с вершинами в центрах отмеченных клеток? **(14 клеток, например, все клетки верхнего и правого рядов, без общей угловой. Рассмотрим двудольный граф, в котором вершины двух долей – это строки и столбцы, а рёбра – отмеченные клетки. Тогда в этом графе не должно быть цикла, иначе три подряд идущих ребра цикла дадут прямоугольный треугольник из центров соответствующих отмеченных клеток на доске (см. рис.). Значит, наш граф представляет из себя лес, и наибольшее количество рёбер-клеток может быть только в случае одной компоненты связности – дерева, т.е. не более 16 (вершин)–1=15 рёбер. Если бы был пример дерева на 15 рёбер без пути длины три, который даёт нам прямоугольный треугольник, то у нас было бы 15 висячих вершин, смежных с одной вершиной степени 15 (граф-«ёжик»). Но это невозможно, т.к. в нашем двудольном графе степень вершины не превышает 8 (в каждой доле по 8 вершин).) Значит, в графе не более 14 рёбер, а на доске не более 14 отмеченных клеток.)**



6–6. Найдите углы равнобедренного треугольника *ABC* (*AB*=*BC*), если треугольник *AOI* также будет равнобедренным, где *O* и *I* – центры вписанной и описанной окружностей. (**(540°/7, 540°/7, 180°/7), (180°/7, 180°/7, 900°/7) и (36°, 36°, 108°). Возможны три случая равнобедренности. 1). *AI*=*IO*, когда *O* расположена между *B* и *I*. Пусть $\angle BAC=\alpha$, тогда $\angle BAO=\angle ABO=90°-\alpha$, $\angle AOI=\angle IAO=\angle BAC/2-\angle BAO=\alpha/2-(90°-\alpha)=3\alpha/2-90°$, но $\angle AOI$ как внешний угол ΔABO равен $2(90°-\alpha)$. Получаем уравнение $2(90°-\alpha)=3\alpha/2-90°$, откуда $\alpha=540°/7$. В этом случае углы треугольника равны 540°/7, 540°/7 и 180°/7. 2). *AI*=*AO*, когда *I* расположена между *B* и *O*. Тогда $\angle BAO=\angle ABO=90°-\alpha$, но $\angle BAO=\angle BAC+\angle CAO=\angle BAC+\angle CAI=3\alpha/2$. Получаем уравнение $90°-\alpha=3\alpha/2$, откуда $\alpha=36°$. В этом случае углы треугольника равны 36°, 36° и 108°. 3). *AI*=*IO*, когда *I* расположена между *B* и *O*. Тогда $\angle BAO=\angle ABO=90°-\alpha$, $\angle AOI=\angle IAO=\angle BAO-\angle BAC/2=(90°-\alpha)-\alpha/2=90°-3\alpha/2$, но из ΔABO следует, что $\angle AOI=180°-2\angle ABO=180°-2(90°-\alpha)=2\alpha$. Получаем уравнение $90°-3\alpha/2=2\alpha$, откуда $\alpha=180°/7$. В этом случае углы треугольника равны 180°/7, 180°/7 и 900°/7.)**