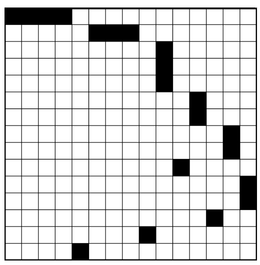
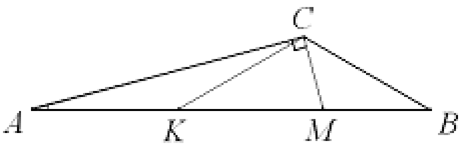
VI Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». III Турнир математических игр.
3-я игра. «Пенальти». ***<u>Младшая лига (7-9 класс).</u>*** **<u>Решения</u>**. ***13 сентября 2010 года***



1. На каком наибольшем квадратном клетчатом поле можно расставить полный комплект кораблей для игры в «морской бой» (1 корабль 1×4, 2 корабля 1×3, 3 корабля 1×2 и 4 корабля 1×1) так, чтобы в каждой вертикали и каждой горизонтали хотя бы одна клетка была занята? Корабли соприкасаться между собой не могут. **(15×15. Корабль 1×4 располагается ровно в 5 рядах (4 – одного направления и 1 – другого направления), корабль 1×3 располагается в 4 рядах, 1×2 – в 3 рядах, 1×1 – в 2 рядах, значит, все корабли могут располагаться максимум в 5+2·4+3·3+4·2=30 рядах (двух направлений), т.е. размер доски не больше 30/2=15. Пример расстановки для доски 15×15 на рис.)**

2. В треугольнике *ABC*: $\angle A=15°$, $\angle B=30°$. Через точку *C* проведён перпендикуляр к *AC*, который пересекает сторону *AB* в точке *M*. Найдите *BC*, если *AM*=5. **(2,5. Проведём *CK* – медиану прямоугольного треугольника *CAM* (см. рис.). Так как $\angle CKB$ – внешний для равнобедренного треугольника *ACK*, то $\angle CKB=30°=\angle CBK$. То есть *CB*=*CK*=0,5*AM*=2,5.)**



3. Сколькими способами из чисел 1, 2, 3, …, 2010 можно выбрать два или больше чисел так, чтобы никакие два выбранных числа в сумме не давали 2011? **(3^{1005}–2011. Разобьём все 2010 чисел на пары чисел, дающих в сумме 2011: (1, 2010), (2, 2009), …, (1005, 1006). Выбирая искомые числа, мы не можем брать числа из одной пары, поэтому для чисел каждой пары есть три варианта выбора (первое число, второе число или оба числа не брать). Тогда всего 3^{1005} способов выбирать таким образом числа из пар, но среди наших выбранных наборов есть один пустой и 2010 одноэлементных, которые нам не подходят.)**

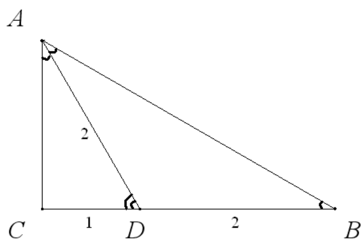
4. Найдите наибольшее натуральное число из различных цифр, в котором сумма любых трёх подряд идущих цифр делится на 4. **(98754310. Должна быть цикличность остатков по модулю 4, т.е. цифры, стоящие через две, должны быть сравнимы по модулю 4, а существуют две тройки (0, 4, 8) и (1, 5, 9), и две пары (2, 6) и (3, 7) таких цифр. Кроме того, может быть использовано не более трёх остатков. Значит, в нашем числе не более 3+3+2=8 цифр, а наибольшим будет 98754310.)**

5. Найдите все натуральные трёхзначные числа, каждое из которых обладает следующими двумя свойствами: 1) вторая цифра числа в 2 раза меньше последней его цифры; 2) сумма самого числа с числом, получающимся из него перестановкой первой и третьей его цифр, делится на 10. **(248, 436, 624, 812. Пусть $\overline{abc}$ - данное число, тогда $c=2b$, $b\leq 4$ и $2b+a$□10. Значит, *a* – чётно и при этом $2b+a=10$. Перебором цифры *b* найдём все нужные числа.)**

6. Шестой член арифметической прогрессии равен 10, а сумма первых шестнадцати членов этой прогрессии равна 200. Найдите двенадцатый член прогрессии. **(16. Разобьём первые 16 членов этой прогрессии на 8 пар (симметрично расположенных относительно середины чисел) с равной суммой, тогда в каждой паре сумма равна 200:8=25, в частности $a_6+a_{11}=25$, тогда $a_{11}=25-a_6=25-10=15$. Тогда разность прогрессии равна $(a_{11}-a_6):5=1$, значит, $a_{12}=a_{11}+1=16$.)**

7. Клетки доски $n\times m$ ($m\geq n\geq 2$) раскрашены в шахматном порядке в чёрный и белый цвета. При каких размерах доски все чёрные диагонали каждого из направлений будут иметь попарно различные длины? *Длина диагонали – количество клеток в ней. Угловая клетка – диагональ длины 1.* **(Это все доски размера $n\times(n+1)$. При различных размерах одинаковой чётности противоположные угловые клетки будут одного цвета, значит, будут диагонали одной длины. При $m\geq n+3$ в каждом из двух направлений будет не менее 4 диагоналей одинаковой длины, среди которых хотя бы две диагонали – чёрные. Остаются доски размера $n\times(n+1)$, шахматная раскраска которых нам подходит, причём по обоим направлениям, и $n\times n$, в которой при $n\geq 2$ есть хотя бы в одном из направлений равные диагонали.)**

8. Какие значения может принимать площадь треугольника *ABC*, в котором биссектриса *AD*=2 делит противоположную сторону на отрезки длины 1 и 2? ($\frac{3\sqrt{3}}{2}$**. Пусть биссектриса *AD*=2 разбивает сторону *BC* на отрезки *BD*=2 и *CD*=1. Тогда ΔABD – равнобедренный, а $\angle ADC=\angle ABD+\angle DAB=2\angle DAB=\angle CAB$, значит, ΔABC и ΔACD подобны (по двум углам), откуда следует, что $\frac{AC}{CD}=\frac{BC}{AC}$, т.е. $AC=\sqrt{3}$. Т.к. стороны ΔACD удовлетворяют теореме Пифагора, то ΔACD – прямоугольный, где $\angle ACD=90°$. Тогда площадь ΔABC равна $\frac{BC\cdot AC}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.)**



9. В газете «Советский спорт» (03.05.1987) была опубликована промежуточная таблица одного футбольного турнира (см. справа) с одной допущенной ошибкой. Укажите эту ошибку и исправьте её верным образом. Укажите также матч, в котором командами в сумме забито больше всего голов. **(Ошибка в графе «Разность мячей» – у команды Швеции должно быть «2–1»; матч Испания–Ирландия=2:2. При одном выигрыше и одной ничьей у Швеции разность мячей не может быть «1–1». Общее количество забитых мячей равно 11, а пропущенных – 12, поэтому ошибка на 1 мяч, т.е. разность мячей у Швеции равна либо «2–1», либо «1–0». Рассмотрение этих вариантов приводит к единственно возможной таблице (см. справа).)**

	игры	победы	ничьи	пораже-ния	разность мячей	очки
Венгрия	**2**	**2**	**0**	**0**	**4 – 1**	**4**
Швеция	**2**	**1**	**1**	**0**	**1 –1**	**3**
Испания	**2**	**0**	**2**	**0**	**3 –3**	**2**
Ирландия	**3**	**0**	**1**	**2**	**3 – 5**	**1**
Франция	**1**	**0**	**0**	**1**	**0 – 2**	**0**

10. Из пункта A в пункт B выехал скорый поезд, одновременно навстречу ему из B в A выехал товарный поезд. Через 5 часов 20 минут они встретились. В пункт B скорый поезд прибыл на 8 часов раньше, чем товарный в A. Сколько времени находился в пути товарный поезд? **(16 часов. Пусть C – место встречи, $AC=x$, $BC=y$, скорости скорого и товарного поездов равны a и b соответственно. Тогда из условий задачи составляется система уравнений $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{16}{3}$, $\frac{x}{b}-\frac{y}{a}=8$, из которой получаем уравнение $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=\frac{3}{2}$, дающее нам отношение скоростей и расстояний $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}=2$. Значит, товарный поезд потратит в два раза больше времени, чем скорый, т.е. 2·8=16 часов.)**

	Венгрия	Швеция	Испания	Ирландия	Франция	разность мячей	очки
Венгрия				**2:1**	**2:0**	**4 – 1**	**4**
Швеция			**1:1**	**1:0**		**2 – 1**	**3**
Испания		**1:1**		**2:2**		**3 – 3**	**2**
Ирландия	**1:2**	**0:1**	**2:2**			**3 – 5**	**1**
Франция	**0:2**					**0 – 2**	**0**

11. Все натуральные числа с суммой цифр 2010 упорядочили по возрастанию. Найдите сотую слева цифру сотого числа в этом ряду. **(8. Этот ряд начинается с 224-значных чисел 399…9, 4899…9, 49899…9, 499899…9, … . И у числа с номером N, где 2≤N≤224, на N-м месте стоит цифра 8.)**

12. Про четырёхзначное число N с различными цифрами известно, что числа 1234, 5678, 9012, 3456 содержат ровно по две цифры, принадлежащие этому числу, однако ни одна из них не стоит на том же месте, что и в числе N. Найдите все возможные значения N. **(2165, 2561, 6125, 6521)**

13. Сколько различных значений можно получить, расставляя скобки в выражении 1:2:3:4:5:6:7:8? **(60 различных значений. В зависимости от расстановки скобок цифры от 3 до 8 попадают либо в числитель, либо в знаменатель – по 2 варианта для каждой цифры (1 всегда в числителе, 2 – в знаменателе), причём все варианты реализуются, т.е. всего 2^6=64 варианта. При этом среди них будут 4 пары одинаковых значений (для цифр 5 и 7 по 2 варианта расположения в дроби) за счёт $\frac{3\cdot 8}{4\cdot 6}=\frac{4\cdot 6}{3\cdot 8}$. Значит, всего 64–4=60 различных значений.)**

14. Найдите наибольшее натуральное число из различных цифр, в котором произведение любых двух подряд идущих цифр делится на 3. **(897653402. В каждой паре цифр должна быть «базовая» цифра, кратная 3, которых всего 4 штуки (0, 3, 6 и 9). Значит, всего не более 9 цифр – 4 базовых и 5 в промежутках между ними, в начале и в конце числа. Тогда в максимально большом девятизначном числе цифры должны чередоваться – небазовая, базовая, …, при этом в каждом множестве (небазовых и базовых) цифр они должны идти по убыванию. Следовательно, наибольшим будет число 897653402.)**

15. На прямой отмечено 100 синих, 10 зелёных и несколько красных точек, причём между любыми двумя одноцветными точками есть точка другого цвета. Сколько может быть красных точек? **(От 89 до 111 красных точек. Между синими должны быть точки других цветов, значит, зелёных и красных точек в сумме не менее 99. Между красными аналогично точки других цветов, значит, красных не более 111=100+10+1 (зелёных и синих в сумме плюс 1). Каждый вариант возможен, когда из варианта в 89 красных точек (сначала 89 пар «синяя-красная», затем 10 пар «синяя-зелёная» и ещё 1 синяя точка) вставкой по одной красных точек между другими и в начале ряда по очереди получим все варианты от 89 до 111.)**

16. У восьми школьников в сумме имеется 719 рублей (у каждого есть только рубли). Известно, что у любых двух из них различные суммы денег, но в каждой паре школьников у одного денег в целое число раз больше, чем у другого. Сколько денег у каждого школьника? **(1, 2, 4, 8, 32, 96, 192 и 384 рубля. Пусть x_1 – наименьшая сумма денег, x_1x_2 – вторая по величине, …, $x_1x_2… x_8$ – наибольшая. По условию все введённые нами величины являются натуральными числами, не меньшими 2, кроме первого числа, которое может быть равно и 1. Сумма всех денег равна простому числу 719 и делится на x_1<719, значит, x_1=1. Аналогично рассуждая, найдём, что $x_2=x_3=x_4=2$ и $x_5+x_5x_6+x_5x_6x_7+x_5x_6x_7x_8=88\,⋮\,x_5$. Если $x_5=2$, то $x_6+x_6x_7+x_6x_7x_8=43$ – простое число, но $x_6\neq1$, значит, $x_5\neq2$. При $x_5=4$ найдём $x_6=3$, $x_7=x_8=2$. Другие значения x_5 не подойдут. Значит, школьники имели соответственно 1, 2, 4, 8, 32, 96, 192 и 384 рубля.)**