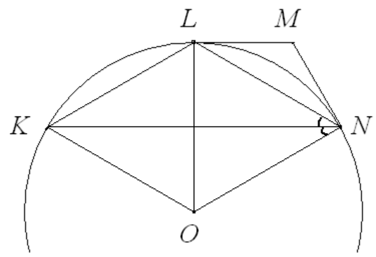
VI Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». III Турнир математических игр.
3-я игра. «Пенальти»*. **<u>Старшая лига (10-11 класс).</u>*** **<u>Решения</u>**. ***13 сентября 2010 года***

1. Первый член геометрической прогрессии, знаменатель которой – натуральное число, равен 5, а разность между утроенным вторым её членом и половиной третьего её члена больше 20. Какие значения может принимать знаменатель этой прогрессии? **(3. Первые три члена прогрессии имеют вид 5, 5q, 5q^2, где q – натуральное число. Из условия следует неравенство $15q-5q^2/2>20$, решением которого будет интервал (2;4), в который входит только одно натуральное число 3.)**

2. В трапеции $KLMN$ основание KN=3, а $\angle M$=120°. Прямые LM и MN являются касательными к окружности, описанной около треугольника KLN. Найдите площадь треугольника KLN. ($\frac{3\sqrt{3}}{4}$**. Пусть O – центр окружности, описанной около ΔKLN. Радиусы OL и ON перпендикулярны касательным LM и MN соответственно, а $\angle LON$=60°. Поэтому ΔLON – правильный, а из перпендикулярности OL и NK следует, что NK – биссектриса $\angle LNO$. Следовательно, высота ΔKLN, опущенная на известную его сторону KN, равна $\frac{1}{2}LO=\frac{1}{2}KN\cdot tg30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$.)**



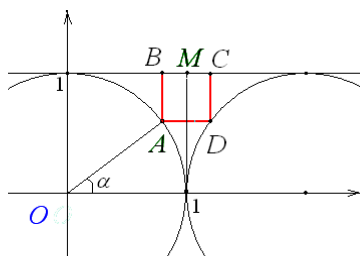
3. Сколькими способами из чисел 1, 2, 3, …, 2010 можно выбрать два или больше чисел так, чтобы никакие два выбранных числа в сумме не давали 2011? **(3^{1005}–2011. Разобьём все 2010 чисел на пары чисел, дающих в сумме 2011: (1, 2010), (2, 2009), …, (1005, 1006). Выбирая искомые числа, мы не можем брать числа из одной пары, поэтому для чисел каждой пары есть три варианта выбора (первое число, второе число или оба числа не брать). Тогда всего 3^{1005} способов выбирать таким образом числа из пар, но среди наших выбранных наборов есть один пустой и 2010 одноэлементных, которые нам не подходят.)**

4. Найдите наибольшее натуральное число из различных цифр, в котором сумма любых трёх подряд идущих цифр делится на 4. **(98754310. Должна быть цикличность остатков по модулю 4, т.е. цифры, стоящие через две, должны быть сравнимы по модулю 4, а существуют две тройки (0, 4, 8) и (1, 5, 9), и две пары (2, 6) и (3, 7) таких цифр. Кроме того, может быть использовано не более трёх остатков. Значит, в нашем числе не более 3+3+2=8 цифр, а наибольшим будет 98754310.)**

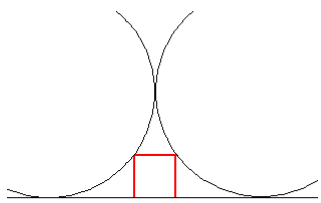
5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $|a-2x|+1=|x+3|$ имеет единственное решение. **(–4 и –8. Минимум функции $y=|a-2x|-|x+3|$ достигается в точке $x=a/2$, при этом $y=-|a/2+3|$, при этом исходное уравнение имеет единственное решение только в точке минимума функции, т.е. тогда и только тогда, когда $y=-1$, откуда и найдём a.)**

6. Шестой член арифметической прогрессии равен 10, а сумма первых шестнадцати членов этой прогрессии равна 200. Найдите двенадцатый член прогрессии. **(16. Разобьём первые 16 членов этой прогрессии на 8 пар (симметрично расположенных относительно середины чисел) с равной суммой, тогда в каждой паре сумма равна 200:8=25, в частности $a_6+a_{11}=25$, тогда $a_{11}=25-a_6=25-10=15$. Тогда разность прогрессии равна $(a_{11}-a_6):5=1$, значит, $a_{12}=a_{11}+1=16$.)**

7. Клетки доски $n\times m$ ($m\geq n\geq 2$) раскрашены в шахматном порядке в чёрный и белый цвета. При каких размерах доски все чёрные диагонали каждого из направлений будут иметь попарно различные длины? *Длина диагонали – количество клеток в ней. Угловая клетка – диагональ длины 1.* **(Это все доски размера $n\times(n+1)$. При различных размерах одинаковой чётности противоположные угловые клетки будут одного цвета, значит, будут диагонали одной длины. При $m\geq n+3$ в каждом из двух направлений будет не менее 4 диагоналей одинаковой длины, среди которых хотя бы две диагонали – чёрные. Остаются доски размера $n\times(n+1)$, шахматная раскраска которых нам подходит, причём по обоим направлениям, и $n\times n$, в которой при $n\geq 2$ есть хотя бы в одном из направлений равные диагонали.)**



8. В криволинейный треугольник, ограниченный дугами двух единичных касающихся внешним образом окружностей и их общей касательной, вписан квадрат (см. рис.). Найдите его площадь. **(4/25. Введём систему координат с началом**



координат в центре *O* одной из окружностей, ось «*ox*» направим в сторону центра второй окружности, тогда точка касания окружностей имеет координаты (1;0), точка касания первой окружности и прямой – (0;1), а вершина квадрата *A*, лежащая на первой окружности, – ($\cos\alpha$; $\sin\alpha$), где $0<\alpha<\pi/2$. Тогда сторона квадрата *AB* равна 2 длинам отрезка *BM*, где *M* (1; 1) – середина стороны *BC* квадрата (см. рис.), что даёт нам уравнение $1-\sin\alpha=2(1-\cos\alpha)$, из которого $\sin\alpha=2\cos\alpha-1$. Возводим в квадрат и получаем, что $1-\cos^2\alpha=4\cos^2\alpha-4\cos\alpha+1$, откуда находим при условии $\cos\alpha>0$, что $\cos\alpha=4/5$. Значит, сторона квадрата равна 2/5, а его площадь равна 4/25.)

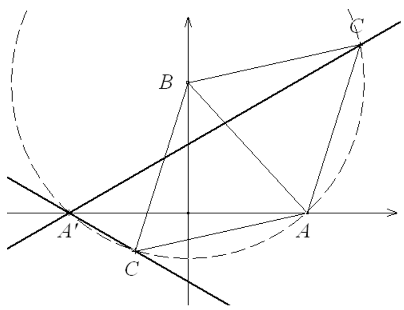
9. В газете «Советский спорт» (03.05.1987) была опубликована промежуточная таблица одного футбольного турнира (см. справа) с одной допущенной ошибкой. Укажите эту ошибку и исправьте её верным образом. Укажите также матч, в котором командами в сумме забито больше всего голов. **(Ошибка в графе «Разность мячей» – у команды Швеции должно быть «2–1»; матч Испания–Ирландия=2:2. При одном выигрыше и одной ничьей у Швеции разность мячей не может быть «1–1». Общее количество забитых мячей равно 11, а пропущенных – 12, поэтому ошибка на 1 мяч, т.е. разность мячей у Швеции равна либо «2–1», либо «1–0». Рассмотрение этих вариантов приводит к единственно возможной таблице (см. справа).)**

	игры	победы	ничьи	поражения	разность мячей	очки
Венгрия	**2**	**2**	**0**	**0**	**4 – 1**	**4**
Швеция	**2**	**1**	**1**	**0**	**1 –1**	**3**
Испания	**2**	**0**	**2**	**0**	**3 –3**	**2**
Ирландия	**3**	**0**	**1**	**2**	**3 – 5**	**1**
Франция	**1**	**0**	**0**	**1**	**0 – 2**	**0**

	Венгрия	Швеция	Испания	Ирландия	Франция	разность мячей	очки
Венгрия				**2:1**	**2:0**	**4 – 1**	**4**
Швеция			**1:1**	**1:0**		**2 – 1**	**3**
Испания		**1:1**		**2:2**		**3 – 3**	**2**
Ирландия	**1:2**	**0:1**	**2:2**			**3 – 5**	**1**
Франция	**0:2**					**0 – 2**	**0**

10. Из пункта *A* в пункт *B* выехал скорый поезд, одновременно навстречу ему из *B* в *A* выехал товарный поезд. Через 5 часов 20 минут они встретились. В пункт *B* скорый поезд прибыл на 8 часов раньше, чем товарный в *A*. Сколько времени находился в пути товарный поезд? **(16 часов. Пусть *C* – место встречи, *AC*=*x*, *BC*=*y*, скорости скорого и товарного поездов равны *a* и *b* соответственно. Тогда из условий задачи составляется система уравнений $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{16}{3},\ \frac{x}{b}-\frac{y}{a}=8$, из которой получаем уравнение $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=\frac{3}{2}$, дающее нам отношение скоростей и расстояний $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}=2$. Значит, товарный поезд потратит в два раза больше времени, чем скорый, т.е. 2·8=16 часов.)**

11. На оси абсцисс декартовой системы координат «*Oxy*» отмечена точка *A*(1;0). Укажите уравнение геометрического места точки *C*, третьей вершины равностороннего *ABC*, если точка *B* лежит на оси ординат. ($y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)$ **. Отметим точку *A’*(–1;0), тогда точки *A*, *C* и *A’* лежат на окружности с центром *B* и радиусом, равным стороне треугольника *ABC*. Следовательно, $\angle AA'C$ является вписанным и равен либо половине центрального $\angle ABC$, либо дополняет его до 180°, т.е. равен либо 30°, либо 150°. Значит, точка *C* лежит на прямой, проходящей через *A’* и составляющей с осью «*Ox*» угол 30°. А таких прямых две: $y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)$ и $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)$.**



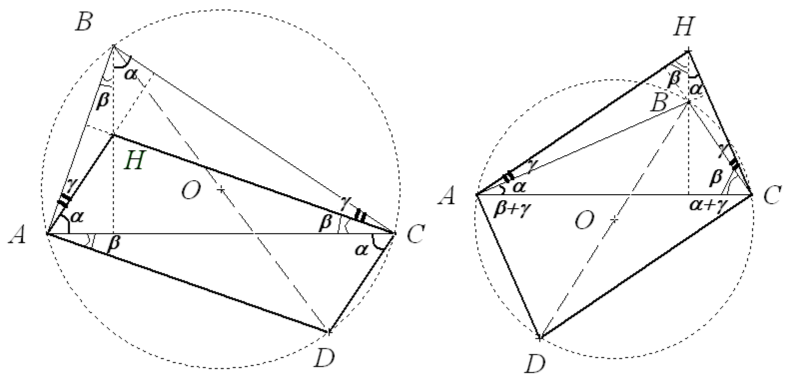
При этом заметим, что для любого положения точки *C* на этих прямых существует соответствующая точка *B* на оси «*Oy*», дающая равносторонний ΔABC.)

12. Про четырёхзначное число *N* с различными цифрами известно, что числа 1234, 5678, 9012, 3456 содержат ровно по две цифры, принадлежащие этому числу, однако ни одна из них не стоит на том же месте, что и в числе *N*. Найдите все возможные значения *N*. **(2165, 2561, 6125, 6521)**

13. Сколько различных значений можно получить, расставляя скобки в выражении 1:2:3:4:5:6:7:8? (**60 различных значений. В зависимости от расстановки скобок цифры от 3 до 8 попадают либо в числитель, либо в знаменатель – по 2 варианта для каждой цифры (1 всегда в числителе, 2 – в знаменателе), причём все варианты реализуются, т.е. всего 2^6=64 варианта. При этом среди них будут 4 пары одинаковых значений (для цифр 5 и 7 по 2 варианта расположения в дроби) за счёт $\frac{3\cdot 8}{4\cdot 6}=\frac{4\cdot 6}{3\cdot 8}$. Значит, всего 64–4=60 различных значений.)**

14. Найдите наибольшее натуральное число из различных цифр, в котором произведение любых двух подряд идущих цифр делится на 3. (**897653402. В каждой паре цифр должна быть «базовая» цифра, кратная 3, которых всего 4 штуки (0, 3, 6 и 9). Значит, всего не более 9 цифр – 4 базовых и 5 в промежутках между ними, в начале и в конце числа. Тогда в максимально большом девятизначном числе цифры должны чередоваться – небазовая, базовая, …, при этом в каждом множестве (небазовых и базовых) цифр они должны идти по убыванию. Следовательно, наибольшим будет число 897653402.)**

15. H – ортоцентр треугольника ABC, точка D диаметрально противоположна точке B на описанной окружности ΔABC и лежит с точкой B на разных дугах AC. Оказалось, что $AHCD$ – параллелограмм. Найдите углы треугольника ABC. (**Любой треугольник с острыми углами A и C. Докажем, что в любом таком треугольнике выполняется данный в условии факт. Рассмотрим ΔABC с ортоцентром H и соответствующим параллелограммом $AHCD$. Из свойств высот следует равенство многих пар углов и тогда, например, в случае остроугольного треугольника получим (см. рис.), что $\angle A=\alpha+\gamma$, $\angle B=\beta+\alpha$, $\angle C=\gamma+\beta$. Откуда с учётом свойств параллелограмма получаем, что $\angle BAD=\angle BCD=\alpha+\beta+\gamma=90°$, значит, BD – диаметр описанной окружности ΔABC. Случаи прямого и тупого угла B рассматриваем отдельно. На самом деле все три случая можно разобрать сразу вместе, если работать с ориентированными углами. С учётом условия , что B и D лежат на разных дугах AC, получаем, что углы A и C могут быть только острые.)**



16. У восьми школьников в сумме имеется 719 рублей (у каждого есть только рубли). Известно, что у любых двух из них различные суммы денег, но в каждой паре школьников у одного денег в целое число раз больше, чем у другого. Сколько денег у каждого школьника? (**1, 2, 4, 8, 32, 96, 192 и 384 рубля. Пусть x_1 – наименьшая сумма денег, x_1x_2 – вторая по величине, …, $x_1x_2\dots x_8$ – наибольшая. По условию все введённые нами величины являются натуральными числами, не меньшими 2, кроме первого числа, которое может быть равно и 1. Сумма всех денег равна простому числу 719 и делится на $x_1<719$, значит, $x_1=1$. Аналогично рассуждая, найдём, что $x_2=x_3=x_4=2$ и $x_5+x_5x_6+x_5x_6x_7+x_5x_6x_7x_8=88\vdots x_5$. Если $x_5=2$, то $x_6+x_6x_7+x_6x_7x_8=43$ – простое число, но $x_6\neq 1$, значит, $x_5\neq 2$. При $x_5=4$ найдём $x_6=3$, $x_7=x_8=2$. Другие значения x_5 не подойдут. Значит, школьники имели соответственно 1, 2, 4, 8, 32, 96, 192 и 384 рубля.)**