

Пятый Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 21-28.09.2010

Второй тур. Гранд-лига. 23 сентября 2010 г.

1. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle B = 90^\circ$. Точки H и K — основания перпендикуляров из точки B на AC и AD соответственно. Докажите, что прямая HK делит отрезок BD пополам.

2. Докажите, что для любых положительных чисел a и b выполнено неравенство $\frac{(a+b)^3}{a^2b} \geq \frac{27}{4}$.

3. Внутри параллелепипеда выбрана точка M . Докажите, что на поверхности параллелепипеда можно выбрать бесконечно много пар точек X, Y таких, что M — середина отрезка XY .

4. В каждой клетке таблицы $m \times n$ поставлено число $+1$ или -1 . За одну операцию можно одновременно поменять знак у числа, стоящего в некоторой клетке и чисел, стоящих в клетках, соседних с ней. (Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону). Докажите, что существует не менее $2^{m(n-1)}$ начальных расстановок, из которых путем описанных операций можно получить таблицу из одних $+1$.

5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O , а его диагонали пересекаются в точке K . Точки M и N — середины дуг AB и CD (не содержащих других вершин четырехугольника) соответственно. Докажите, что прямая OK делит отрезок MN в отношении AB/CD .

6. Решите уравнение $x^3 + y^3 + 1 = x^2y^2$ в целых числах.

7. Найдите все функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что для любых действительных x и y выполнено равенство

$$f((f(x))^2 + f(y)) = xf(x) + y.$$

8. На горизонтальной прямой расставлено 2010 точек. Каждая из этих точек окрашена в красный или синий цвет. На каждой точке написана сумма количества синих точек слева от нее и красных точек справа. Оказалось, что среди написанных чисел ровно 10 нечетных чисел (а остальные 2000 четные). Сколько могло быть точек красного цвета?

9. Вася сдавал тесты по алгебре, геометрии и химии. Каждый тест состоял из нескольких вопросов, по разным дисциплинам могло быть разное количество вопросов. Оказалось, то по алгебре он дал 50% верных ответов, по геометрии — 70%, по химии — 80%. Также известно, что он дал 62% верных ответов на вопросы по алгебре и геометрии и 74% — по геометрии и химии. Каков процент верных ответов у Васи за все тесты?

10. Взаимно простые числа a и b таковы, что число $\frac{a+b}{a-b}$ — целое. Докажите, что либо число $ab + 1$, либо число $4ab + 1$ — квадрат целого числа.