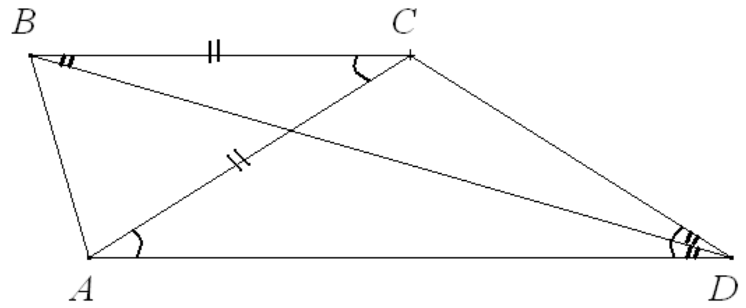
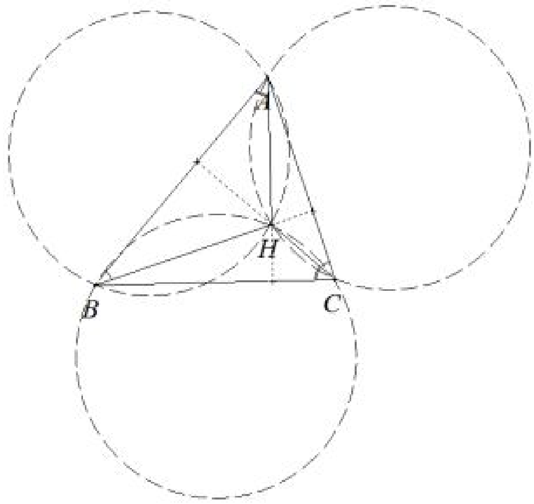
VII Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». IV Турнир математических игр.
Математическая игра «2 капитана». («Бороться и искать, найти и не сдаваться»).
Младшая лига*. Решения. *10 сентября 2011 года



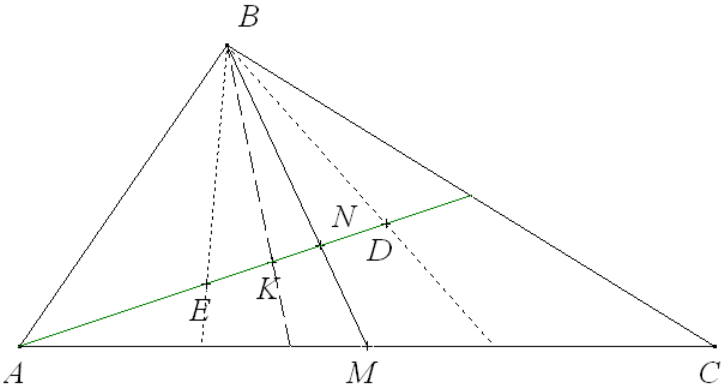
1. **(устно)** Диагональ AC равна основанию BC трапеции $ABCD$, а $\angle ACB=\angle ADC$. Докажите, что диагональ DB – биссектриса $\angle ADC$. **($\angle CAD=\angle ACB$ (как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC), значит, $\angle CAD=\angle ADC$, т.е. ΔCAD – равнобедренный. Тогда $DC=AC=BC$, т.е. ΔBCD – равнобедренный и $\angle CBD=\angle CDB$. Кроме того, $\angle ADB=\angle CBD$ (как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC), значит, $\angle ADB=\angle CDB$, т.е. DB – биссектриса $\angle ADC$.)**
2. **(письменно)** Найдите какое-нибудь натуральное число, состоящее только из нечётных цифр и делящееся на 2011. **(Например, число из 2010-ти девяток. Действительно, по малой теореме Ферма $10^{2010}\equiv 1 \pmod{2011}$, откуда $10^{2010}-1=\underbrace{999...99}_{2010\text{ девяток}}$ делится на 2011.)**
3. **(письменно)** Известно, что $[a]=n$, $[b]=n-1$, (n – натуральное число). Сколько различных значений может принимать $[ab]$? ($[x]$ – целая часть x, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x) **($\underline{2n}$. $[a]=n \Leftrightarrow n\le a<n+1$, $[b]=n-1 \Leftrightarrow n-1\le b<n$. Тогда $n(n-1)\le a\cdot b<n(n+1)$, откуда $n^2-n\le[a\cdot b]\le n^2+n-1$. Тогда всего $(n^2+n-1-(n^2-n))+1=2n$ различных значений, каждое из которых достигается.)**
4. **(письменно)** Внутри остроугольного ΔABC отмечена такая точка H, что $\angle ABH=\angle ACH$ и $\angle BAH=\angle BCH$. Докажите, что H – ортоцентр ΔABC. **(Опишем окружности вокруг ΔABH, ΔBCH и ΔCAH. Т.к. на общую хорду AH опираются равные вписанные углы, то радиусы окружностей, описанных вокруг ΔABH и ΔCAH равны, аналогично равны радиусы окружностей, описанных вокруг ΔABH и ΔBCH. Значит, окружности, описанные вокруг ΔBCH и ΔCAH равны, откуда на общую хорду CH опираются либо вписанные углы суммой 180°, что невозможно из суммы углов ΔABC, либо равные углы. Итак, $\angle HBC=\angle HAC$. Но тогда сумма $\angle ABC$ и $\angle BCH$ равна сумме $\angle BAC$ и $\angle ACH$, значит, $CH\perp AB$, аналогично, $AH\perp BC$ и $BH\perp AC$, т.е. H – ортоцентр ΔABC.)**



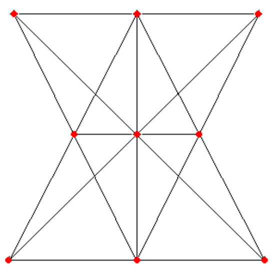
5. **(ответ)** Натуральные числа m и n взаимно просты. Какое наибольшее значение может принимать НОД чисел $m+2011n$ и $n+2011m$? **($\underline{2011^2-1}$. Пусть искомый НОД равен d. Тогда $2011\cdot(n+2011m)-(m+2011n)=(2011^2-1)m$ делится на d и $2011\cdot(m+2011n)-(n+2011m)=(2011^2-1)n$ делится на d. Но m и n взаимно просты. Значит, d – делитель числа 2011^2-1. В то же время при $m=1$; $n=2011^2-2011-1$, получаем, что НОД$((2011^2-1)\cdot(2011-1); 2011^2-1)$ равен 2011^2-1.)**

6. **(ответ+пример)** Почтальон получил для продажи конверты – 8 пачек по 100 штук. Покупатель попросил 10 пачек по 60 конвертов. Конверты перекладываются по одному, и на перекладывание одного конверта почтальон тратит 1 секунду. За какое наименьшее количество времени он может выполнить просьбу? **(<u>За 4 минуты</u>. Заметим, что отложить 60 конвертов из 100 - это то же самое, что отложить 40, а 60 оставить. Пусть почтальон отложит по 40 конвертов из 6 пачек, (в них останется по 60 конвертов, а переложено будет 6·40=240 конвертов); причём сразу складывая их в 4 пачки по 60, тогда ему будет достаточно 240 секунд, то есть 4 минуты. Покажем, что быстрее это сделать не удастся. Пусть почтальон смог сделать это менее, чем за 240 секунд. Тогда переложено менее 240 различных конвертов. Значит, есть не более 5 пачек из тех, в которых было по 100, содержащих по 60 конвертов, иначе было бы отложено не менее 240 конвертов. Также, образовалось не более 3 новых пачек по 60 конвертов. Значит, могло получиться не более 8 пачек по 60 конвертов. Противоречие.)**

7. **(письменно)** Назовём *абсолютно простым* простое число, которое при любой перестановке цифр в его записи остаётся простым. Докажите, что в записи абсолютно простого числа может присутствовать не более трёх различных цифр. **(Ясно, что в записи *абсолютно простого* числа из не менее чем двух цифр могут быть только цифры 1, 3, 7, 9. Докажем, что все они встретиться не могут. Действительно, перестановками цифр в числе, содержащем все эти цифры, можно получить числа N+1379, N+3179, N+9137, N+7913, N+1397, N+1937, N+7139 при некотором целом неотрицательном N, дающие все 7 различных остатков при делении на 7 (т.к. 1379≡0, 3179≡1, 9137≡2, 7913≡3, 1397≡4, 1937≡5, 7139≡6 по модулю 7). Значит, одно из этих семи полученных чисел точно делится на 7 и не является простым, следовательно, все 4 цифры встретиться в *абсолютно простом* числе не могут.)**



8. **(устно)** Из вершины A внутри треугольника ABC проведён отрезок, на котором отмечены точки E, K, N и D (лежат на отрезке в указанном порядке от точки A) такие, что N лежит на медиане BM, K – на биссектрисе угла B, а E и D – на биссектрисах углов ABM и CBM соответственно. Докажите, что если $BE=BD$, то $BK=BN$. **(Пусть $\angle ABC=\beta$, $\angle ABM=x$, $\angle CBM=y$. Тогда $\angle KBE=\angle ABK-\angle ABE=\beta/2-x/2=(x+y)/2-x/2=y/2=\angle NBD$. Кроме того, из равнобедренности ΔDBE следует, что $\angle BEK=\angle BDN$. Тогда треугольники BEK и BDN равны по стороне и двум прилежащим углам ($BE=BD$, $\angle KBE=\angle NBD$, $\angle BEK=\angle BDN$), значит, $BK=BN$.)**



9. **(письменно)** Дано множество из k точек, никакие четыре из которых не лежат на одной прямой. Известно, что есть ровно m троек этих точек, лежащих на одной прямой. Верно ли, что отношение k/m всегда не меньше 1? **(<u>Не верно</u>. См. пример, где k/m=9/10<1.)**

10. **(устно)** В компанию из N человек пришёл журналист. Ему известно, что в этой компании есть человек X, которого знают все остальные члены компании, но он сам не знает никого. Журналист может к каждому члену компании обратиться с вопросом про любого другого: "Знаете ли вы такогото?" Найдите наименьшее количество вопросов, достаточное для того, чтобы наверняка найти X. *(Все отвечают на вопросы правдиво.)* (**<u>$N-1$</u>. Очевидно, что человек, которого знают все, но сам не знающий никого, может быть только один. Пусть журналист спросил некоторого человека A, знает ли он некоторого другого человека B. Тогда если A знает B, то A - не X, а если A не знает B, то B не X. Таким образом, с каждым вопросом вне зависимости от ответа журналист сокращает перебор максимум на одного человека. Ясно, что он уложится за $N-1$ вопросов, так как достаточно убрать из рассмотрения N-1 человека, а оставшийся и будет X. При этом ему могло не везти и нужный человек мог оказаться найденным только на последнем вопросе.)**

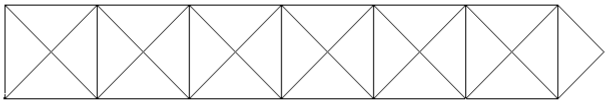
11. **(устно)** На центральной клетке полоски 1×2011 стоит фишка. Два игрока по очереди передвигают её на 1; 2; 4;… клетки в любую сторону (k-ым ходом фишка передвигается на 2^{k-1} клеток). Проигрывает тот, кто не может сходить. Кто выигрывает при правильной игре? (**<u>Первый</u>. Так как 1+2+4+…+128<256, пятым своим ходом первый игрок, независимо от предыдущих ходов, может поставить фишку на расстояние менее 256 от центральной клетки. Тогда после хода второго игрока (на 512 клеток) она будет на расстоянии более 256 от центра. Значит, следующим ходом первый игрок сможет передвинуть фишку на 1024 клетки, т.к. 1006+256>1024, а после этого второй игрок уже не сможет сходить, ведь 2048>2011.)**

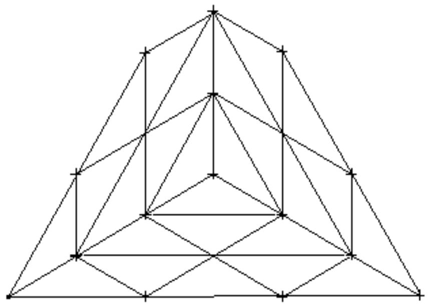
12. **(письменно)** Решите систему уравнений: $\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3^2, \\ x_2 + x_3 = x_1^2, \\ x_3 + x_1 = x_2^2. \end{cases}$ (**<u>$x_1=x_2=x_3=0$ или 2</u>. Пусть одно из этих чисел равно 0. Без ограничения общности, пусть $x_3=0$. Тогда $x_1=-x_2$, $x_1=x_2^2$, $x_2=x_1^2$. Как несложно убедиться, в этом случае $x_1=x_2=0$, т.е. если среди этих чисел есть 0, то и два остальных равны 0. Пусть теперь все эти числа ненулевые. Без ограничения общности, пусть $x_1 \ge x_2 \ge x_3$. Тогда $2x_1 \ge x_2+x_3=x_1^2$, $2x_3 \le x_1+x_2=x_3^2$, т.е. $0<x_1 \le 2$, $x_3 \ge 2$ или $x_3<0$, откуда в первом случае $x_1=x_2=x_3=2$, либо, во втором случае, из $x_2+x_3=x_1^2$ получаем, что $0<x_1^2<x_2$. Пусть $|x_3|=k$. Т. к. $x_2^2=x_1-k \ge x_2-k=x_1^2$, то $|x_2| \ge |x_1|$. Но $x_1 \ge x_2>0$, поэтому $x_1=x_2>0$, значит, $2x_1=k^2$, $x_1-k=x_1^2$. Тогда $x_1^2<x_1$, откуда $x_1<1$. Но в то же время $x_1-\sqrt{2x_1}=x_1^2$, откуда $2x_1=x_1^4+x_1^2-2x_1^3$, т.е. $2=x_1^3+x_1-2x_1^2$, что невозможно, ведь $x_1^3+x_1-2x_1^2<2-2x_1^2<2$. Значит, имеем два решения: $x_1=x_2=x_3=0$, $x_1=x_2=x_3=2$.)**

13. **(ответ+пример)** Клетки шахматной доски закрашиваются по очереди. Если у закрашиваемой клетки чётное количество ранее закрашенных соседей (по стороне), то в неё ставится 0, если нечётное – 1. Когда вся доска закрашена, считают сумму чисел на ней. Каково её наименьшее возможное значение? (**<u>0</u>. Приведём пример (цифры обозначают порядок закрашивания).)**

64	63	61	58	54	49	43	8
62	60	57	53	48	42	7	15
59	56	52	47	41	6	14	21
55	51	46	40	5	13	20	26
50	45	39	4	12	19	25	30
44	38	3	11	18	24	29	33
37	2	10	17	23	28	32	34
1	9	16	22	27	31	34	36

14. **(пример)** Разрежьте какой-нибудь выпуклый пятиугольник на 25 равных треугольников. **(<u>См. рис.</u> 1). Прямоугольник 1×6 разрежем на 24 равных треугольника (каждую клетку – на 4 треугольника по диагоналям), после чего приставим к единичной стороне ещё 1 такой треугольник. 2). Пятиугольник получается из равностороннего треугольника, разрезанного на три равные части по 9 треугольников, с удалением двух маленьких треугольников.)**





15. **(ответ+пример)** В однокруговом турнире по футболу с участием $n\geq 6$ команд команда, занявшая последнее (n-ое) место выиграла у первых трёх, занявшая (n-1)-ое место выиграла у первых двух, а занявшая (n-2)-ое место – у победителя турнира. При каком наименьшем n такое возможно? *(За победу даётся 3 очка, за ничью – 1, за поражение – 0. В случае равенства очков более высокое место занимает команда с большим количеством побед, затем – с лучшей разницей забитых и пропущенных мячей.)* **(<u>При n=7</u>. Первая команда должна набрать не менее 9 очков, но она проиграла трём последним, значит, должно быть ещё не менее трёх команд, помимо первой и трёх последних. Приведём пример на 7 команд.**

№	1	2	3	4	5	6	7	З-П	место
1	●	2:0	2:0	2:0	0:1	0:1	0:1	3	1
2	0:2	●	2:0	2:0	2:0	0:1	0:1	2	2
3	0:2	0:2	●	2:0	2:0	2:0	0:1	1	3
4	0:2	0:2	0:2	●	2:0	2:0	2:0	0	4
5	1:0	0:2	0:2	0:2	●	2:0	2:0	-1	5
6	1:0	1:0	0:2	0:2	0:2	●	2:0	-2	6
7	1:0	1:0	1:0	0:2	0:2	0:2	●	-3	7

Замечание: *Места команд в данном случае будут определяться из разности забитых и пропущенных мячей, поэтому в примере это должно быть указано*.**)**

16. **(письменно)** Докажите, что при всех натуральных n число $(1^3+2^3+\ldots+(2n)^3)+n$ делится на $n+1$. **(Обозначим $a_n=(1^3+2^3+\ldots+(2n)^3)+n$. Тогда $2a_n=(2^3+(2n)^3)+(3^3+(2n-1)^3)+\ldots+((2n)^3+2^3)+2n+2=b_n+2(n+1)$. Заметим, что $b_n \vdots 2(n+1)$, т.к. при любом $2\leq k\leq 2n$ число $k^3+(2n-k+2)^3=(k+(2n-k+2))(k^2-k(2n-k+2)+(2n-k+2)^2) \vdots\ (k+(2n-k+2))$, что равно $2(n+1)$, поэтому $2a_n \vdots 2(n+1)$, откуда следует, что исходное выражение делится на $n+1$ при всех натуральных n.)**