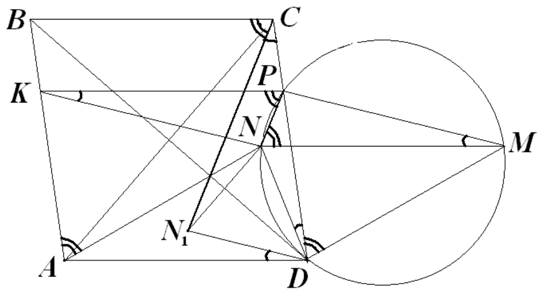
VII Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». IV Турнир математических игр.
Математическая игра «2 капитана». («Бороться и искать, найти и не сдаваться»).
Старшая лига*. Решения. *10 сентября 2011 года

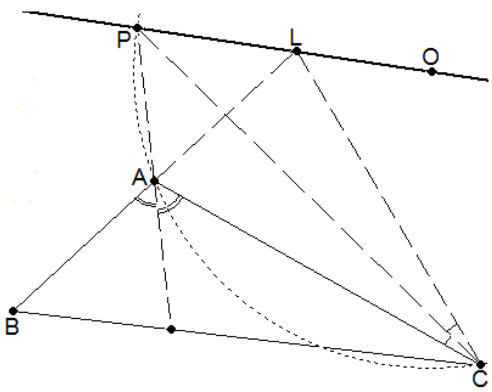
1. **(устно)** Внутри ромба $ABCD$ отмечены точки N и N_1, симметричные относительно диагонали BD, на стороне AB отмечена точка K, а на стороне DC – точка P так, что $NK \| N_1D$ и $KP \| AD$. Докажите, что $PN \| CN_1$. **(Построим параллелограмм $KPMN$, тогда $ANMD$ – тоже параллелограмм. Из условия (симметрия и параллельность) следует, что $\angle PDN=\angle CDN=\angle ADN_1=\angle NKP$, а из построения $\angle NKP=\angle NMP$, тогда из равенства углов PDN и PMN следует, что $PNDM$ – вписанный четырёхугольник. Тогда $\angle KPN=\angle PNM$(накрест лежащие)$=\angle PDM$(опирающиеся на одну дугу)$=\angle BAN$(между парами параллельных прямых)$=\angle BCN_1$(симметричные относительно диагонали ромба), значит, $PN \| CN_1$.)**



2. **(письменно)** Найдите какое-нибудь натуральное число, состоящее только из нечётных цифр и делящееся на 2011. **(Например, число из 2010-ти девяток. Действительно, по малой теореме Ферма $10^{2010}\equiv 1 \pmod{2011}$, откуда $10^{2010}-1=\underbrace{999...99}_{2010\ \text{девяток}}$ делится на 2011.)**

3. **(письменно)** Известно, что $[a]=n$, $[b]=n-1$, (n – натуральное число). Сколько различных значений может принимать $[ab]$? ($[x]$ – целая часть x, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x) **(<u>$2n$</u>. $[a]=n \Leftrightarrow n\le a<n+1$, $[b]=n-1 \Leftrightarrow n-1\le b<n$. Тогда $n(n-1)\le a\cdot b<n(n+1)$, откуда $n^2-n\le[a\cdot b]\le n^2+n-1$. Тогда всего $(n^2+n-1-(n^2-n))+1=2n$ различных значений, каждое из которых достигается.)**

4. **(письменно)** В треугольнике ABC $\angle A=108°$. На луче BA выбрана точка L $(BA<BL)$. Прямые, содержащие биссектрисы $\angle BAC$ и $\angle ACL$, пересекаются в точке P. Пусть O - центр описанной окружности ΔPAC. Докажите, что P, L, O лежат на одной прямой. **(Пусть $\angle ALC=\alpha$. Заметим, что P – центр вневписанной окружности ΔALC, касающейся стороны AL. Тогда LP – биссектриса внешнего угла ΔALP, поэтому $\angle ALP = 90°-\alpha/2$. $\angle PAC=180°-\angle BAC+\angle PAL=72°+54°=126°$. $\angle POC$ – центральный угол окружности, описанной около ΔPAC, $\angle PAC$ – вписанный, поэтому $\angle POC=108°$. ΔALC: $\angle ACP=(108°-\alpha)/2$. ΔCPL: $\angle CPL=180°-(90°-\alpha/2)-\alpha-54°+\alpha/2=36°$. ΔCPO – равнобедренный ($OP=OC$), следовательно, $\angle CPO=(180°-\angle POC)/2=36°$. Итак, $\angle CPL =\angle CPO$, т.е. P, L, O лежат на одной прямой.)**



5. **(ответ)** Натуральные числа m и n взаимно просты. Какое наибольшее значение может принимать НОД чисел $m+2011n$ и $n+2011m$? **(<u>2011^2-1</u>. Пусть искомый НОД равен d. Тогда $2011\cdot(n+2011m)-(m+2011n)=(2011^2-1)m$ делится на d и $2011\cdot(m+2011n)-(n+2011m)=(2011^2-1)n$ делится на d. Но m и n взаимно просты. Значит, d – делитель числа 2011^2-1. В то же время при $m=1$; $n=2011^2-2011-1$, получаем, что НОД$((2011^2-1)\cdot(2011-1); 2011^2-1)$ равен 2011^2-1.)**

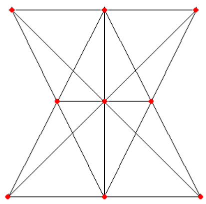
6. **(письменно)** Докажите, что для сторон треугольника a, b и c выполняется неравенство $\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$. **(Если обозначить отрезки от вершин до точек касания вписанной окружности как x, y, z, то наше неравенство примет вид $\sqrt{2}(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})\le\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}$. Введём вектора $\vec{a}(\sqrt{x},\sqrt{y})$, $\vec{b}(\sqrt{y},\sqrt{z})$ и $\vec{c}(\sqrt{z},\sqrt{x})$. Тогда $\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}=|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|\ge|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2+(\sqrt{y}+\sqrt{z}+\sqrt{x})^2}=\sqrt{2}(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})$, что и требовалось доказать.)**

7. **(письменно)** Назовём *абсолютно простым* простое число, которое при любой перестановке цифр в его записи остаётся простым. Докажите, что в записи абсолютно простого числа может присутствовать не более трёх различных цифр. **(Ясно, что в записи *абсолютно простого* числа из не менее чем двух цифр могут быть только цифры 1, 3, 7, 9. Докажем, что все они встретиться не могут. Действительно, перестановками цифр в числе, содержащем все эти цифры, можно получить числа N+1379, N+3179, N+9137, N+7913, N+1397, N+1937, N+7139 при некотором целом неотрицательном N, дающие все 7 различных остатков при делении на 7 (т.к. $1379\equiv 0$, $3179\equiv 1$,**

9137≡2, 7913≡3, 1397≡4, 1937≡5, 7139≡6 по модулю 7). Значит, одно из этих семи полученных чисел точно делится на 7 и не является простым, следовательно, все 4 цифры встретиться в *абсолютно простом* числе не могут.)

8. **(устно)** На встречу выпускников пришло 45 человек. Оказалось, что любые двое из них, имеющие одинаковое число знакомых среди пришедших, не знакомы друг с другом. Какое наибольшее число пар знакомых могло быть среди участвовавших во встрече? **(<u>870</u>. Обозначим через A_k количество выпускников, имеющих ровно k знакомых. Пусть некоторый выпускник знаком ровно с k людьми. По условию, любой его знакомый не может иметь ровно k знакомых. Поэтому A_k не превосходит 45-k при любом k. Также заметим, что $A_0+A_1+...+A_{44}=45$. Тогда число пар знакомых выпускников $S=(0\cdot A_0+1\cdot A_1+...+44\cdot A_{44})/2=(A_{44}+(A_{44}+A_{43})+...+(A_{44}+A_{43}+...+A_{36})+...+(A_{44}+A_{43}+...+A_1))/2\leq(1+(1+2)+\ldots+(1+2+\ldots+9)+45\cdot35)/2=870$. Приведем пример на 870. Поскольку 45=1+2+3+...+9, можно разбить 45 человек на группы по 1, по 2, …, по 9 человек. Пусть люди, принадлежащие одной группе, не знакомы между собой, а люди, принадлежащие разным группам, знакомы. Тогда каждый человек из k-й группы имеет 45-k знакомых. При этом, очевидно, условие задачи выполнено, и общее количество пар знакомых равно $(1\cdot44+2\cdot43+\ldots+9\cdot36)/2=(45^2-(9^2+8^2+\ldots+1^2))/2=870$.)**

9. **(письменно)** Дано множество из k точек, никакие четыре из которых не лежат на одной прямой. Известно, что есть ровно m троек этих точек, лежащих на одной прямой. Верно ли, что отношение k/m всегда не меньше 1? **(<u>Не верно</u>. См. пример, где k/m=9/10<1.)**



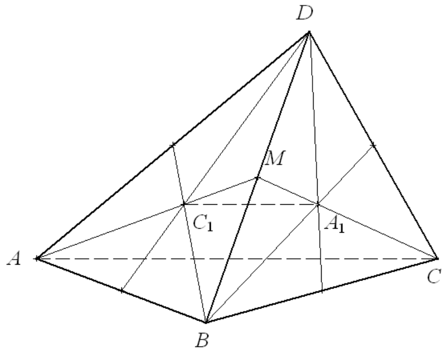
10. **(устно)** В компанию из N человек пришёл журналист. Ему известно, что в этой компании есть человек X, которого знают все остальные члены компании, но он сам не знает никого. Журналист может к каждому члену компании обратиться с вопросом про любого другого: "Знаете ли вы такого-то?" Найдите наименьшее количество вопросов, достаточное для того, чтобы наверняка найти X. *(Все отвечают на вопросы правдиво.)* **(<u>N–1</u>. Очевидно, что человек, которого знают все, но сам не знающий никого, может быть только один. Пусть журналист спросил некоторого человека A, знает ли он некоторого другого человека B. Тогда если A знает B, то A - не X, а если A не знает B, то B не X. Таким образом, с каждым вопросом вне зависимости от ответа журналист сокращает перебор максимум на одного человека. Ясно, что он уложится за N–1 вопросов, так как достаточно убрать из рассмотрения N-1 человека, а оставшийся и будет X. При этом ему могло не везти и нужный человек мог оказаться найденным только на последнем вопросе.)**

11. **(устно)** При каких n>3 правильный n-угольник можно разрезать непересекающимися (внутри) диагоналями на равнобедренные треугольники? **(<u>При нечётных n_i, принадлежащих рекуррентной последовательности: $n_1=5=2^2+1$, $n_k=2n_{k-1}-1=2^{k+1}+1$, где k – любое натуральное число; и при чётных n вида $2^k\cdot(2^m+1)$, где m – любое целое неотрицательное число, k – любое натуральное число.</u>** 1). ***<u>Пусть сначала n – нечётно</u>*. Тогда существует равнобедренный треугольник, ровно одна сторона которого является стороной исходного n-угольника. Тогда, в силу его равнобедренности, ему принадлежит противолежащая этой стороне вершина. Исключим этот треугольник из рассмотрения. Тогда наш n-угольник разрезается на два непересекающихся $(n+1)/2$-угольника, в каждом из которых основание – сторона первого равнобедренного треугольника, больше всех сторон и диагоналей, откуда она служит основанием равнобедренного треугольника с вершиной, противоположной ей, поэтому $(n+1)/2$ также нечётно. Таким образом получим три равнобедренных треугольника и 4 $(((n+1)/2)+1)/2$ многоугольника, в котором каждая сторона и диагональ меньше основании и т. д. Продолжая этот процесс (а он рано или поздно завершится), заключаем, что $\dfrac{\dfrac{\dfrac{n+1}{2}+1}{2}+1\ \ldots}{2}=3$, что, как мы показали, равносильно требованию задачи. Это условие можно записать в виде рекуррентной формулы: $n_1=5$, $n_k=2n_{k-1}-1$, которую можно задать в общем виде как $n_k=2^{k+1}+1$, что легко доказывается по индукции. 2). *<u>Пусть теперь n-чётное</u>*. В этом случае равнобедренный треугольник не может содержать ровно одну сторону n-угольника, т.к. для этой стороны не будет такой вершины, что полученный треугольник будет равнобедренным, ведь при чётном n не будет противоположной вершины. Значит, любой равнобедренный треугольник, содержащий сторону n-**

угольника должен содержать ровно две его стороны. В то же время любая сторона должна принадлежать некоторому равнобедренному треугольнику, откуда следует, что разрезанный *n*-угольник будет представлять собой как-то разрезанный правильный *n*/2-угольник, на сторонах которого, как на основаниях, построены равнобедренные треугольники. Значит, правильный $n=2^k\cdot p$-угольник (*p*-нечётное) можно разрезать искомым образом в том и только в том случае, если можно разрезать искомым образом правильный *p*-угольник (в частности, *p*=3 тоже подходит) или если у нас будет вырожденный случай при *p*=1. А все такие нечётные *p*, большие 3, мы уже описали ранее.)

12. (письменно) Решите систему уравнений: $\begin{cases} x_1+x_2=x_3^2, \\ x_2+x_3=x_1^2, \\ x_3+x_1=x_2^2. \end{cases}$ **(<u>$x_1=x_2=x_3=0$ или 2</u>. Пусть одно из этих чисел равно 0. Без ограничения общности, пусть $x_3=0$. Тогда $x_1=-x_2$, $x_1=x_2^2$, $x_2=x_1^2$. Как несложно убедиться, в этом случае $x_1=x_2=0$, т.е. если среди этих чисел есть 0, то и два остальных равны 0. Пусть теперь все эти числа ненулевые. Без ограничения общности, пусть $x_1\ge x_2\ge x_3$. Тогда $2x_1\ge x_2+x_3=x_1^2$, $2x_3\le x_1+x_2=x_3^2$, т.е. $0<x_1\le 2$, $x_3\ge 2$ или $x_3<0$, откуда в первом случае $x_1=x_2=x_3=2$, либо, во втором случае, из $x_2+x_3=x_1^2$ получаем, что $0<x_1^2<x_2$. Пусть $|x_3|=k$. Т. к. $x_2^2=x_1-k\ge x_2-k=x_1^2$, то $|x_2|\ge|x_1|$. Но $x_1\ge x_2>0$, поэтому $x_1=x_2>0$, значит, $2x_1=k^2$, $x_1-k=x_1^2$. Тогда $x_1^2<x_1$, откуда $x_1<1$. Но в то же время $x_1-\sqrt{2x_1}=x_1^2$, откуда $2x_1=x_1^4+x_1^2-2x_1^3$, т.е. $2=x_1^3+x_1-2x_1^2$, что невозможно, ведь $x_1^3+x_1-2x_1^2<2-2x_1^2<2$. Значит, имеем два решения: $x_1=x_2=x_3=0$, $x_1=x_2=x_3=2$.)**

13. (письменно) Докажите, что существует бесконечно много таких функций *f(x)*, что для любого действительного *x* выполняется условие *f(x-f(x))=0*. **(<u>Подойдёт любая линейная функция вида *f(x)=x-a* при *x>a*; 0 при *x≤a*, которых бесконечно много</u>. Действительно, тогда *f(x-f(x))=f(x-(x-a))=f(a)=0* при *x>a* и *f(x-f(x))=f(x)=0* при *x≤a*.)**



14. (письменно) *ABCD* – треугольная пирамида. Точки A_1, B_1, C_1 и D_1 – точки пересечения медиан граней *BCD*, *CDA*, *DAB* и *ABC* соответственно. Докажите, что треугольная пирамида $A_1B_1C_1D_1$ подобна пирамиде *ABCD*, и найдите коэффициент подобия. **(Пусть *M* – середина ребра *BD*, тогда в треугольнике *AMC* отрезок A_1C_1 параллелен стороне *AC* и равен её трети, т.к. из свойств точки пересечения медиан $MC_1:MA=MA_1:MC=1:3$. Таким образом, вектор $\overrightarrow{A_1C_1}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Аналогично рассуждаем и с другими соответственными рёбрами наших треугольных пирамид. Значит, пирамида $A_1B_1C_1D_1$ подобна пирамиде *ABCD* и коэффициент подобия равен 1/3.)**

15. (ответ+пример) В однокруговом турнире по футболу с участием *n*≥6 команд команда, занявшая последнее (*n*-ое) место выиграла у первых трёх, занявшая (*n*-1)-ое место выиграла у первых двух, а занявшая (*n*-2)-ое место – у победителя турнира. При каком наименьшем *n* такое возможно? *(За победу даётся 3 очка, за ничью – 1, за поражение – 0. В случае равенства очков более высокое место занимает команда с большим количеством побед, затем – с лучшей разницей забитых и пропущенных мячей.)* **(<u>При *n*=7</u>. Первая команда должна набрать не менее 9 очков, но она проиграла трём последним, значит, должно быть ещё не менее трёх команд, помимо первой и трёх последних. Приведём пример на 7 команд.**

№	1	2	3	4	5	6	7	З-П	место
1	●	2:0	2:0	2:0	0:1	0:1	0:1	3	1
2	0:2	●	2:0	2:0	2:0	0:1	0:1	2	2
3	0:2	0:2	●	2:0	2:0	2:0	0:1	1	3
4	0:2	0:2	0:2	●	2:0	2:0	2:0	0	4
5	1:0	0:2	0:2	0:2	●	2:0	2:0	-1	5
6	1:0	1:0	0:2	0:2	0:2	●	2:0	-2	6
7	1:0	1:0	1:0	0:2	0:2	0:2	●	-3	7

Замечание: *Места команд в данном случае будут определяться из разности забитых и пропущенных мячей, поэтому в примере это должно быть указано*.**)**

16. (ответ) Пусть D_k – максимально возможное количество пар соседних цифр, образующих двузначное число, делящееся на *k*, в десятизначном числе из различных цифр; N_k – количество чисел с таким D_k; M_k – наибольшее из таких чисел. Найдите D_5, N_5, M_5. **(D_5=2 – количество цифр, кратных**

5, N_5=8·9!(0 и 5 не могут стоять на первом месте)-8·8!(числа, где после 0 стоит 5)=8^2·8!=2580480, M_5=9876543210)