VII Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». IV Турнир математических игр. Математическая игра «2 капитана». («Бороться и искать, найти и не сдаваться»).
***Младшая лига*. 10 сентября 2011 года**

1. **(устно)** Диагональ AC равна основанию BC трапеции $ABCD$, а $\angle ACB=\angle ADC$. Докажите, что диагональ DB – биссектриса $\angle ADC$.

2. **(письменно)** Найдите какое-нибудь натуральное число, состоящее только из нечётных цифр и делящееся на 2011.

3. **(письменно)** Известно, что $[a]=n$, $[b]=n-1$, (n – натуральное число). Сколько различных значений может принимать $[ab]$? ($[x]$ – целая часть x, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x)

4. **(письменно)** Внутри остроугольного ΔABC отмечена такая точка H, что $\angle ABH=\angle ACH$ и $\angle BAH=\angle BCH$. Докажите, что H – ортоцентр ΔABC.

5. **(ответ)** Натуральные числа m и n взаимно просты. Какое наибольшее значение может принимать НОД чисел $m+2011n$ и $n+2011m$?

6. **(ответ+пример)** Почтальон получил для продажи конверты – 8 пачек по 100 штук. Покупатель попросил 10 пачек по 60 конвертов. Конверты перекладываются по одному, и на перекладывание одного конверта почтальон тратит 1 секунду. За какое наименьшее количество времени он может выполнить просьбу?

7. **(письменно)** Назовём *абсолютно простым* простое число, которое при любой перестановке цифр в его записи остаётся простым. Докажите, что в записи абсолютно простого числа может присутствовать не более трёх различных цифр.

8. **(устно)** Из вершины A внутри треугольника ABC проведён отрезок, на котором отмечены точки E, K, N и D (лежат на отрезке в указанном порядке от точки A) такие, что N лежит на медиане BM, K – на биссектрисе угла B, а E и D – на биссектрисах углов ABM и CBM соответственно. Докажите, что если $BE=BD$, то $BK=BN$.

9. **(письменно)** Дано множество из k точек, никакие четыре из которых не лежат на одной прямой. Известно, что есть ровно m троек этих точек, лежащих на одной прямой. Верно ли, что отношение k/m всегда не меньше 1?

10. **(устно)** В компанию из N человек пришёл журналист. Ему известно, что в этой компании есть человек X, которого знают все остальные члены компании, но он сам не знает никого. Журналист может к каждому члену компании обратиться с вопросом про любого другого: "Знаете ли вы такого-то?" Найдите наименьшее количество вопросов, достаточное для того, чтобы наверняка найти X. *(Все отвечают на вопросы правдиво.)*

11. **(устно)** На центральной клетке полоски 1×2011 стоит фишка. Два игрока по очереди передвигают её на 1; 2; 4;… клетки в любую сторону (k-ым ходом фишка передвигается на 2^{k-1} клеток). Проигрывает тот, кто не может сходить. Кто выигрывает при правильной игре?

12. **(письменно)** Решите систему уравнений: $\begin{cases} x_1+x_2=x_3^2, \\ x_2+x_3=x_1^2, \\ x_3+x_1=x_2^2. \end{cases}$

13. **(ответ+пример)** Клетки шахматной доски закрашиваются по очереди. Если у закрашиваемой клетки чётное количество ранее закрашенных соседей (по стороне), то в неё ставится 0, если нечётное – 1. Когда вся доска закрашена, считают сумму чисел на ней. Каково её наименьшее возможное значение?

14. **(пример)** Разрежьте какой-нибудь выпуклый пятиугольник на 25 равных треугольников.

15. **(ответ+пример)** В однокруговом турнире по футболу с участием $n\geq6$ команд команда, занявшая последнее (n-ое) место выиграла у первых трёх, занявшая (n-1)-ое место выиграла у первых двух, а занявшая (n-2)-ое место – у победителя турнира. При каком наименьшем n такое возможно? *(За победу даётся 3 очка, за ничью – 1, за поражение – 0. В случае равенства очков более высокое место занимает команда с большим количеством побед, затем – с лучшей разницей забитых и пропущенных мячей.)*

16. **(письменно)** Докажите, что при всех натуральных n число $(1^3+2^3+\ldots+(2n)^3)+n$ делится на $n+1$.