**VII Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». IV Турнир математических игр. Математическая игра «2 капитана». («Бороться и искать, найти и не сдаваться»).**
***<u>Старшая лига</u>. 10 сентября 2011 года***

1. **(устно)** Внутри ромба $ABCD$ отмечены точки $N$ и $N_1$, симметричные относительно диагонали $BD$, на стороне $AB$ отмечена точка $K$, а на стороне $DC$ – точка $P$ так, что $NK \| N_1D$ и $KP \| AD$. Докажите, что $PN \| CN_1$.

2. **(письменно)** Найдите какое-нибудь натуральное число, состоящее только из нечётных цифр и делящееся на 2011.

3. **(письменно)** Известно, что $[a]=n$, $[b]=n-1$, ($n$ – натуральное число). Сколько различных значений может принимать $[ab]$? ($[x]$ – целая часть $x$, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее $x$)

4. **(письменно)** В треугольнике $ABC$ $\angle A=108°$. На луче $BA$ выбрана точка $L$ $(BA<BL)$. Прямые, содержащие биссектрисы $\angle BAC$ и $\angle ACL$, пересекаются в точке $P$. Пусть $O$ - центр описанной окружности $\Delta PAC$. Докажите, что $P$, $L$, $O$ лежат на одной прямой.

5. **(ответ)** Натуральные числа $m$ и $n$ взаимно просты. Какое наибольшее значение может принимать НОД чисел $m+2011n$ и $n+2011m$?

6. **(письменно)** Докажите, что для сторон треугольника $a$, $b$ и $c$ выполняется неравенство $\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b} \le \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$.

7. **(письменно)** Назовём *абсолютно простым* простое число, которое при любой перестановке цифр в его записи остаётся простым. Докажите, что в записи абсолютно простого числа может присутствовать не более трёх различных цифр.

8. **(устно)** На встречу выпускников пришло 45 человек. Оказалось, что любые двое из них, имеющие одинаковое число знакомых среди пришедших, не знакомы друг с другом. Какое наибольшее число пар знакомых могло быть среди участвовавших во встрече?

9. **(письменно)** Дано множество из $k$ точек, никакие четыре из которых не лежат на одной прямой. Известно, что есть ровно $m$ троек этих точек, лежащих на одной прямой. Верно ли, что отношение $k/m$ всегда не меньше 1?

10. **(устно)** В компанию из $N$ человек пришёл журналист. Ему известно, что в этой компании есть человек $X$, которого знают все остальные члены компании, но он сам не знает никого. Журналист может к каждому члену компании обратиться с вопросом про любого другого: "Знаете ли вы такого-то?" Найдите наименьшее количество вопросов, достаточное для того, чтобы наверняка найти $X$. *(Все отвечают на вопросы правдиво.)*

11. **(устно)** При каких $n>3$ правильный $n$-угольник можно разрезать непересекающимися (внутри) диагоналями на равнобедренные треугольники?

12. **(письменно)** Решите систему уравнений: $\begin{cases} x_1+x_2=x_3^2, \\ x_2+x_3=x_1^2, \\ x_3+x_1=x_2^2. \end{cases}$

13. **(письменно)** Докажите, что существует бесконечно много таких функций $f(x)$, что для любого действительного $x$ выполняется условие $f(x-f(x))=0$.

14. **(письменно)** $ABCD$ – треугольная пирамида. Точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ и $D_1$ – точки пересечения медиан граней $BCD$, $CDA$, $DAB$ и $ABC$ соответственно. Докажите, что треугольная пирамида $A_1B_1C_1D_1$ подобна пирамиде $ABCD$, и найдите коэффициент подобия.

15. **(ответ+пример)** В однокруговом турнире по футболу с участием $n\ge 6$ команд команда, занявшая последнее ($n$-ое) место выиграла у первых трёх, занявшая ($n$-1)-ое место выиграла у первых двух, а занявшая ($n$-2)-ое место – у победителя турнира. При каком наименьшем $n$ такое возможно? *(За победу даётся 3 очка, за ничью – 1, за поражение – 0. В случае равенства очков более высокое место занимает команда с большим количеством побед, затем – с лучшей разницей забитых и пропущенных мячей.)*

16. **(ответ)** Пусть $D_k$ – максимально возможное количество пар соседних цифр, образующих двузначное число, делящееся на $k$, в десятизначном числе из различных цифр; $N_k$ – количество чисел с таким $D_k$; $M_k$ – наибольшее из таких чисел. Найдите $D_5$, $N_5$, $M_5$.