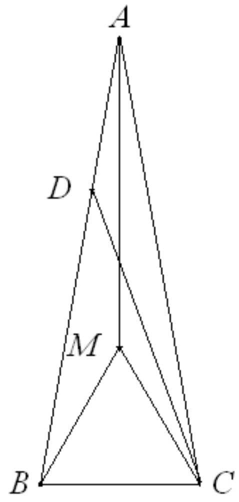
VII Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». IV Турнир математических игр.

Математическая игра «Пенальти»**.** ***<u>Младшая лига.</u>*** **<u>Решения</u>*.*** ***11 сентября 2011 года***

1. Назовём набор из ста натуральных чисел *красивым*, если сумма чисел набора равна их НОКу. Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел *красивого* набора? **(<u>$120=2^3\cdot3\cdot5$, например, у набора 8, 8, 5, 3 и 96 единиц</u>. Заметим, что среди чисел красивого набора обязательно должны быть числа, в разложении которых на простые множители есть каждый из простых множителей НОКа в соответствующей степени разложения самого НОКа. Кроме того, сумма чисел набора не меньше 100. Начнём перебирать возможные значения суммы-НОКа и для каждого значения, меньшего 120, покажем простые множители в соответствующих степенях, за счёт которых найдутся выше описанные числа и сумма чисел набора будет больше НОКа: $100\to5^2=25$, $101\to101$, $102\to17$, $103\to103$, $104\to13$, $105\to7$, $106\to53$, $107\to107$, $108\to3^3=27$, $109\to109$, $110\to11$ и 5, $111\to37$, $112\to2^4=16$, $113\to113$, $114\to19$, $115\to23$, $116\to29$, $117\to13$ и $3^2=9$, $118\to59$, $119\to17$ и 7.)**

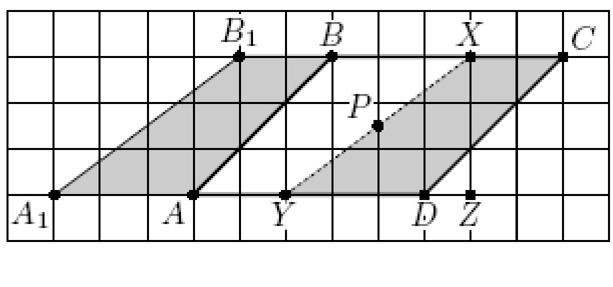


2. Угол при вершине A равнобедренного треугольника ABC ($AB=AC$) равен 20°. На стороне AB отложен отрезок AD, равный BC . Найдите угол BCD. **(<u>70°</u>. На высоте AH данного треугольника отметим такую точку M, что треугольник BMC – равносторонний. Поскольку $AB=AC$, $BM=BC=AD$, $\angle ABM=\angle ABC-\angle MBC=80°-60°=20°=\angle DAC$, то треугольники ABM и CAD равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $\angle ACD=\angle BAM=10°$. Следовательно, $BCD=\angle BCA-\angle ACD=80°-10°=70°$.)**

3. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы все клетки доски оказались под боем этих ладей? (Занятая ладьёй клетка считается побитой.) **(<u>$2\cdot8^8 - 8!$</u>. Если есть строка и столбец без ладей, то клетка на их пересечении не "бьется", значит, либо во всех строках, либо во всех столбцах стоит по ладье. Количество способов расставить ладьи по одной в каждой строке равно 8^8, аналогично для столбцов, но способы (8!), когда по одной ладье стоит в каждой строке и каждом столбце (ладьи, не бьющие друг друга), нами посчитаны по два раза.)**

4. Про действительные числа a и b известно, что $0<ab\le 4$ и $a+b+2=\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}$. Чему может быть равна сумма $a+b$? **(<u>-2, -4</u>. Умножив обе части данного уравнения на $(a+1)(b+1)$, получим $(a+b+2)(a+1)(b+1) = a+b+2$ (*). Отсюда следует, что $a+b$ может равняться -2 (например, при $a = -3/2$, $b = -1/2$). Если же $a+b \ne -2$, то, деля уравнение (*) на $a+b+2$, получаем $(a+1)(b+1) = 1 \Leftrightarrow -a-b = ab$. Так как по условию $ab > 0$, отсюда следует, что числа a и b отрицательны. Поэтому последнее равенство можно переписать в виде $|a|+|b| = ab$, откуда из неравенства Коши получаем, что $ab = |a|+|b| \ge 2\sqrt{ab} \Rightarrow \sqrt{ab} \ge 2 \Rightarrow ab \ge 4 \Rightarrow -(a+b) = ab = 4$, т.к. по условию $ab \le 4$.)**

5. На координатной плоскости (0xy) даны точки $A(0;0)$, B (3;3), C (8;3) и $D(5;0)$. Напишите уравнение какой-нибудь прямой, которая проходит через точку пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$ и разбивает его на две части, из которых можно сложить



ромб. ($\underline{y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}}$ **<u>или в каноническом виде 3*x*–4*y*–6=0</u>. Пусть *P*(4;1,5) – точка пересечения диагоналей четырёхугольника *ABCD*, который на самом деле является параллелограммом. Отметим на сторонах *BC* и *AD* точки *X* (6;3) и *Y*(2;0), тогда прямая *XY* проходит через центр исходного параллелограмма *ABC*D, т.е. через точку пересечения диагоналей *P*, и** $XY=\sqrt{(6-2)^2+(3-0)^2}=5=BC=BX+XC$**. Тогда из четырёхугольников *ABXY* и *YXCD* можно сложить ромб A_1B_1XY. Уравнение прямой *XY* найдём по координатам точек *X* и *Y*:** $\frac{x-2}{6-2}=\frac{y-0}{3-0}$**.)**

6. Решите уравнение $\sqrt{x-\sqrt{3-8\sqrt{35-8\sqrt{19}}}}=2$. ($\underline{\sqrt{19}}$**. Заметим, что число** $35-8\sqrt{19}=19-2\times4\times\sqrt{19}+16=(\sqrt{19}-4)^2$**, поэтому из-под предпоследнего корня извлекаем число (**$\sqrt{19}-4$**)>0, затем аналогично из под предыдущего корня извлекаем это же число. Тогда уравнение примет вид** $\sqrt{x-\sqrt{19}+4}=2$**, откуда после возведения в квадрат получаем, что** $x=\sqrt{19}$ **.)**

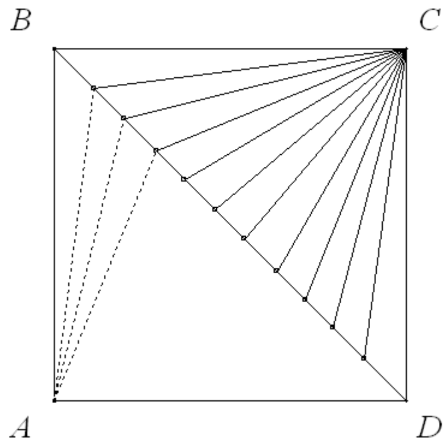
7. Сколько существует троек натуральных чисел, не превосходящих 100, таких, что сумма их квадратов делится на 7? (*Порядок чисел в тройке не важен. Ответ дать числом в десятичной записи.*) **(<u>24108</u>. При делении на 7 квадрат целого числа даёт остатки 0 (14 чисел в первой сотне), 1 (29 чисел), 4 (29 чисел) и 2 (28 чисел), при этом они образуют цикл 1, 4, 2, 2, 4, 1, 0, который в сотне умещается 14 раз (первые 98 чисел). Перебор вариантов показывает, что возможны 2 случая делимости суммы на 7 – либо все остатки равны 0, либо они дают тройку (1, 2, 4). В первом случае количество троек равно 14 (если все числа равны) + 14·13 (если одно число встречается дважды) +** $C_{14}^3=\frac{14!}{3!\cdot11!}=\frac{14\cdot13\cdot12}{6}=14\cdot13\cdot2$**. Во втором случае количество троек равно 29·28·29. Полученную сумму можно достаточно быстро посчитать в уме, например, следующим образом:** $14+14\cdot13+14\cdot13\cdot2+29\cdot28\cdot29=14\cdot(1+13+26)+(30-1)^2\cdot28$ $=28\cdot(20+841)=7\cdot4\cdot861=7\cdot3444=24108$**.)**

8. Найдите все конечные множества точек на плоскости, обладающие тем свойством, что никакие три точки множества не лежат на одной прямой и вместе с каждыми тремя точками данного множества точка пересечения высот треугольника, образованного этими точками, также принадлежит данному множеству. **(<u>Искомое множество представляет собой либо три вершины и ортоцентр остроугольного треугольника, либо три вершины прямоугольного треугольника, либо четыре вершины квадрата</u>. Пусть *M* – некоторое такое множество точек. Рассмотрим выпуклую оболочку *V* этого множества. У многоугольника *V* не может быть тупого угла. В самом деле, если *A*, *B*, *C* – три последовательные вершины многоугольника *V*, и угол *ABC* – тупой, то точка пересечения высот (ортоцентр) треугольника *ABC* лежит вне угла *ABC*, и следовательно, вне *V*. Итак, отсюда следует, что *V* – это прямоугольный или остроугольный треугольник или квадрат. Рассмотрим случай остроугольного треугольника *ABC*. Обозначим за *H* его ортоцентр, принадлежащий *M*. Пусть кроме точек *A*, *B*, *C*, *H* есть ещё одна точка *K* из множества *M*. *K* лежит в одном из треугольников *ABH*, *BCH*, *CAH* (поскольку *K* лежит внутри *V*), для определенности, пусть *K* лежит в треугольнике *BCH*. Нетрудно установить, что сумма углов *BAC* и *BHC* равна 180° (это извест-**

ное свойство точки пересечения высот). Поскольку *K* лежит в треугольнике *BCH*, угол *BHC* меньше угла *BKC*. Ортоцентр *L* треугольника *BCK* должен лежать внутри V. Но в таком случае угол *BLC* не меньше угла *BAC*. Это означало бы, что сумма углов *BKC* и *BLC* больше 180° вопреки свойству ортоцентра. Таким образом, в случае, когда *V* является остроугольным треугольником, кроме точек *A*, *B*, *C*, *H* ни одна точка не может принадлежать множеству *M*. Если *V* – прямоугольный треугольник, то его ортоцентр совпадает с вершиной прямого угла. Аналогично предыдущим рассуждениям можно показать, что кроме вершин *V* ни одной точки не может принадлежать множеству *M*. Если *V* – квадрат, то ортоцентр любого треугольника, образованного его тремя вершинами, совпадает с одной из этих вершин. Деля квадрат диагональю на 2 части и рассуждая аналогично приведенному выше, получаем, что множество *M* не содержит других точек, кроме вершин квадрата.)

9. Решите уравнение $[x]+[2x]+[4x]+[8x]=2011$, где $[a]$ – целая часть числа a. **(**$\underline{134\frac{1}{8} \le x < 134\frac{1}{4}}$**. Докажем, что для любого натурального *k* верны оценки $k[x]\le[kx]\le k[x]+k-1$. Пусть $[x]=n$, $0\le\{x\}=\alpha<1$, $x=n+\alpha$, тогда $k[x]=kn=[kn]\le[kx]=[kn+k\alpha]\le kn+k\alpha<kn+k$, что и требовалось доказать. Таким образом, имеем $15[x]\le S=[x]+[2x]+[4x]+[8x]\le15[x]+(1+3+7)=15[x]+11$, но $2011=15\cdot134+1$, т.е. возможен только случай $[x]=134$, $[2x]=2\cdot134$, $[4x]=4\cdot134$, $[8x]=8\cdot134+1$. Получаем систему из 4 неравенств (∗) $134\le x<135$, $2\cdot134\le2x<2\cdot134+1$, $4\cdot134\le4x<4\cdot134+1$, $8\cdot134+1\le8x<8\cdot134+2$, откуда получаем, что** $134\frac{1}{8} \le x < 134\frac{1}{4}$**.)**

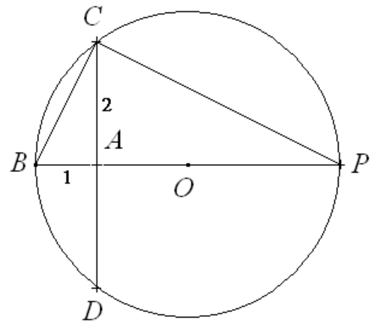
10. Внутри квадрата взяли 10 различных точек, после чего разрезали его на треугольники так, что вершинами треугольников являются только данные 14 точек (с учётом вершин квадрата) и каждая из этих 14 точек также является вершиной треугольников. Сколько могло получиться треугольников? **(<u>От 12 до 22 треугольников</u>. Заметим, что вершины квадрата дают в общую сумму углов треугольников вклад в 360°, а каждая из 10 отмеченных внутренних точек даёт вклад либо в 360° (если точка не лежит на стороне какого-нибудь треугольника), либо в 180° (если точка лежит на стороне треугольника). Тогда сумму всех углов треугольников равна 360°+180°·*n*, где *n* принимает целые значения от 10 до 20, отсюда находим, что число треугольников равно *n*+2. При этом все случаи от 12 до 22 треугольников реализуются, например, когда все 10 точек лежат на диагонали *BD* квадрата *ABCD*. Из примера в 12 треугольников (проведена диагональ *BD* и все внутренние точки соединены с вершиной *C*) получим все остальные примеры, проводя новые отрезки из вершины *A* поочерёдно к десяти внутренним точкам (см. рис.).)**



11. Сколько существует натуральных чисел, у которых любые две последовательные цифры образуют точный квадрат? **(<u>14 чисел</u>. Выпишем все двузначные квадраты и составим орграф, в котором ориентированное ребро показывает начало и конец двузначного квадрата:** $8\to1\to6\to4\to9$, $3\to6$ **и** $2\to5$**. Используя этот орграф, найдём что нужных нам двузначных – 6 чисел (81, 16, 64, 49, 36, 25), трёх-**

значных – 4 числа (816, 164, 649, 364), четырёхзначных – 3 числа (8164, 1649, 3649) и пятизначных – 1 число (81649). Всего в сумме – 14 чисел.)

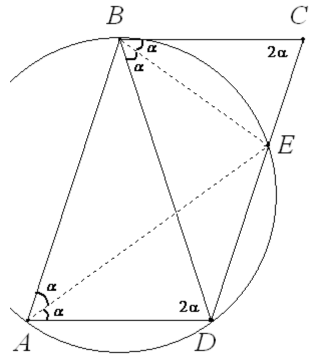
12. Внутри окружности дана точка *A*, кратчайшее расстояние от которой до окружности равно 1, а длина кратчайшей хорды, проходящей через *A*, равна 4. Найдите радиус этой окружности. **(2,5. Пусть *B* – точка окружности, ближайшая к *A*, *BP* – диаметр, проходящий через *A*, *CD* – кратчайшая хорда, проходящая через *A*, тогда $\angle BAC$=90°, что легко доказывается из свойства пересекающихся хорд. Тогда прямоугольные треугольники *ABC* и *CBP* подобны и $\frac{BP}{BC}=\frac{BC}{BA}$, т.е. диаметр окружности $BP=\frac{BC^2}{BA}=\frac{BA^2+CA^2}{BA}=\frac{1^2+2^2}{1}=5$.)**



13. Вова сложил из кубиков прямоугольный параллелепипед с различными сторонами. Количество его кубиков равно то ли 9991, то ли 9919, а разность каких-то двух его сторон не больше 6. Чему могут быть равны стороны Вовиного параллелепипеда? **(9991=1×97×103, 9919=13×7×109 =1×7×1417– *3 варианта*. Разложим каждое из чисел на простые множители 9991=10000–9=100^2–3^2=(100–3)(100+3)=97×103 и 9919=10000–81=100^2–9^2=(100–9)(100+9) =91×109=7×13×109. Разобрав все варианты произведения ровно трёх натуральных чисел, найдём, что нам подойдут ровно три вышеперечисленных случая.)**

14. Если четырёхзначное число *N* умножить на 999, то получится число, оканчивающееся на 2011. Найдите *N*. **(6989. Если к полученному после умножения числу прибавить *N*, то у нас будет число 1000*N*, оканчивающееся на три нуля, значит, *N* должно оканчиваться на 989. Тогда наше четырёхзначное число $N=\overline{a989}=1000N-999N=\overline{a989000}-\overline{...2011}=6989$.)**

15. Найдите углы параллелограмма *ABCD*, в котором *AB*=*BD* и биссектрисы углов *DAB* и *DBC* пересекаются на стороне *CD*. **(72° и 108°. Треугольники *ABD* и *BDC* – равные и равнобедренные (с углом при основании 2α), а $\angle DAE=\angle DBE$=α, где *E* – точка пересечения биссектрис углов *DAB* и *DBC* на стороне *CD*. Тогда *BEDA* – вписанный четырёхугольник и $\angle BDE=\angle BAE$=α (как опирающиеся на одну дугу), значит, $\angle ADC$=3α=180°–2α, откуда α=180°/5=36°.)**



16. Даны 2011 множеств, каждое из которых состоит из 45 элементов, причём объединение любых двух множеств содержит ровно 89 элементов. Сколько элементов может содержать объединение всех этих 2011 множеств? **(44·2011+1=88485 элементов. По условию любые два множества пересекаются по одному элементу. Докажем, что все множества пересекаются по одному элементу. Предположим противное. Возьмём множество M_1. В нём найдётся элемент *A*, который принадлежит по крайней мере ещё 45-ти множествам – M_2, M_3, ..., M_{46}, т.к. в противном случае общее число множеств не превосходило бы 44·45+1=1981, что меньше 2011. По нашему предположению, имеется множество, не содержащее элемента *A*. Оно пересекается по одному элементу с множествами M_1, M_2, M_3, ..., M_{46} и поэтому содержит 46, а не 45 элементов. Противоречие.)**