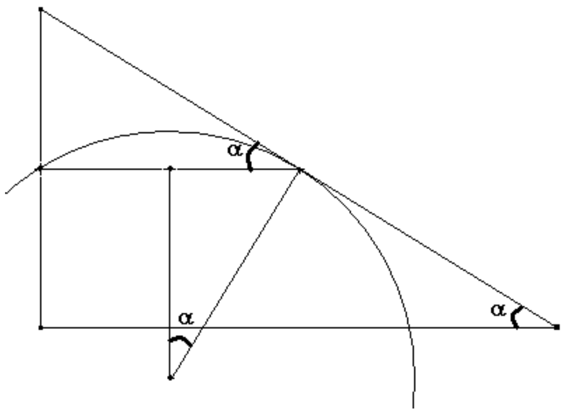
VII Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». IV Турнир математических игр.
Математическая игра «Пенальти». ***Старшая лига.*** **Решения**. ***11 сентября 2011 года***

1. Назовём набор из ста натуральных чисел *красивым*, если сумма чисел набора равна их НОКу. Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел *красивого* набора? (**$120=2^3\cdot3\cdot5$, например, у набора 8, 8, 5, 3 и 96 единиц. Заметим, что среди чисел красивого набора обязательно должны быть числа, в разложении которых на простые множители есть каждый из простых множителей НОКа в соответствующей степени разложения самого НОКа. Кроме того, сумма чисел набора не меньше 100. Начнём перебирать возможные значения суммы-НОКа и для каждого значения, меньшего 120, покажем простые множители в соответствующих степенях, за счёт которых найдутся выше описанные числа и сумма чисел набора будет больше НОКа: $100\to5^2=25$, $101\to101$, $102\to17$, $103\to103$, $104\to13$, $105\to7$, $106\to53$, $107\to107$, $108\to3^3=27$, $109\to109$, $110\to11$ и 5, $111\to37$, $112\to2^4=16$, $113\to113$, $114\to19$, $115\to23$, $116\to29$, $117\to13$ и $3^2=9$, $118\to59$, $119\to17$ и 7.)**

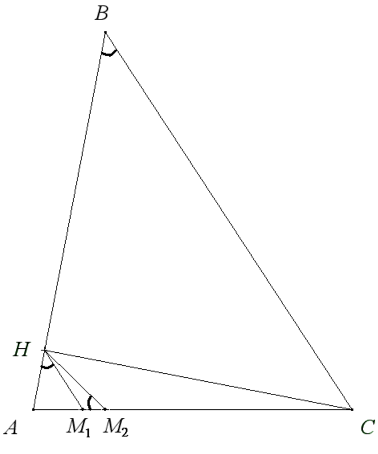
2. Наименьший из углов прямоугольного треугольника равен α. Через середину меньшего катета и середину гипотенузы проведена окружность, касающаяся гипотенузы. Найдите отношение площадей круга и треугольника. ($\frac{\pi\cos\alpha}{8\sin^3\alpha}$. **Центр указанного круга – точка пересечения серединного перпендикуляра к гипотенузе и серединного перпендикуляра к средней линии треугольника, параллельной большему катету. Если $2x$ – гипотенуза, а R – радиус круга, то меньший катет равен $2x\cdot\sin\alpha$, больший катет равен $2x\cdot\cos\alpha$,**



половина указанной средней линии равна $x/2\cdot\cos\alpha$, $R = x/2\cdot\cos\alpha/\sin\alpha$. Следовательно, площадь треугольника равна $2x^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$, площадь круга равна $\pi R^2=\frac{\pi x^2\cos^2\alpha}{4\sin^2\alpha}$, а искомое отношение равно $\frac{\pi\cos\alpha}{8\sin^3\alpha}$.)

3. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы все клетки доски оказались под боем этих ладей? (Занятая ладьёй клетка считается побитой.) (**$2\cdot8^8-8!$. Если есть строка и столбец без ладей, то клетка на их пересечении не “бьется”, значит, либо во всех строках, либо во всех столбцах стоит по ладье. Количество способов расставить ладьи по одной в каждой строке равно 8^8, аналогично для столбцов, но способы (8!), когда по одной ладье стоит в каждой строке и каждом столбце (ладьи, не бьющие друг друга), нами посчитаны по два раза.)**

4. Про действительные числа a и b известно, что $0<ab\le 4$ и $a+b+2=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}$. Чему может быть равна сумма $a+b$? (**-2, -4. Умножив обе части данного уравнения на $(a+1)(b+1)$, получим $(a+b+2)(a+1)(b+1) = a+b+2$ (*). Отсюда следует, что $a+b$ может равняться -2 (например, при $a=-3/2$, $b=-1/2$). Если же $a+b\ne-2$, то, деля уравнение (*) на $a+b+2$, получаем $(a+1)(b+1)=1 \Leftrightarrow -a-b=ab$. Так как по условию $ab>0$, отсюда следует, что числа a и b отрицательны. Поэтому последнее равенство можно переписать в виде $|a|+|b|=ab$, откуда из неравенства Коши получаем, что $ab=|a|+|b|\ge2\sqrt{ab} \Rightarrow \sqrt{ab}\ge2 \Rightarrow ab\ge4 \Rightarrow -(a+b)=ab=4$, т.к. по условию $ab\le4$.)**



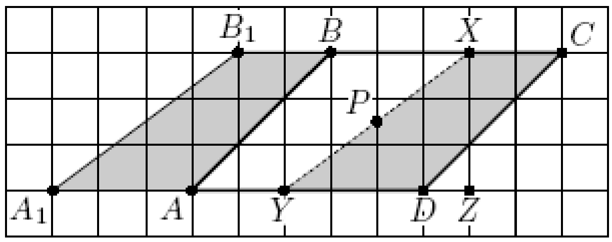
5. Точка H – основание высоты треугольника со сторонами 10, 12, 14, опущенной на сторону, равную 12. Через точку H проведена прямая, отсекающая от треугольника подобный ему треугольник и пересекающая сторону, равную 10, в точке M. Найдите HM. (**7/3 или 14/5. Пусть CH – высота треугольника ABC со сторонами AB=12, AC=10, BC=14. По теореме косинусов**

$\cos\angle BAC = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2\cdot AB\cdot AC} = \frac{144+100-196}{2\cdot 12\cdot 10} = \frac{1}{5}$. **Из прямоугольного треугольника *AHC* находим, что $AH=AC\cdot\cos\angle BAC=10\cdot 1/5=2$. Заметим, что существуют ровно два случая расположения точки *M* на стороне *AC*: либо $\angle AHM_1=\angle ABC$, либо $\angle AHM_2=\angle ACB$ (см. рис.). В первом из этих случаев $HM_1 \| BC$, треугольник AHM_1 подобен треугольнику *ABC* с коэффициентом $AH/AB=2/12=1/6$, следовательно, $HM=BC\cdot 1/6=14\cdot 1/6=7/3$. Во втором случае треугольник AM_2H подобен треугольнику *ABC*, причём коэффициент подобия равен $AH/AC=\cos\angle BAC=1/5$, следовательно, $HM=BC\cdot 1/5=14/5$.)**

6. Сумма положительных чисел *a* и *b* равна 1. Найдите все значения, которые может принимать выражение $k-[ka]-[kb]$ при всевозможных натуральных *k* в зависимости от параметра *a*, где $[x]$ – целая часть числа *x*. **(<u>Если *a* рационально, то 0 и 1; если *a* иррационально, значение выражения всегда равно 1.</u> Пусть $x=ka$. Надо выяснить какие значения может принимать выражение $k-[x]-[k-x]$, если $0<x<k$. Рассмотрим отрезок $[0;k]$, точка *x* лежит внутри этого отрезка. Число $[x]$ показывает сколько единичных отрезков, откладываемых от точки 0, поместится на отрезке $[0;x]$. Число $[k-x]$ показывает сколько единичных отрезков, откладываемых от точки *k*, поместится на отрезке $[x;k]$. Всего на отрезке $[0;k]$ *k* единичных отрезков. Мы могли учесть их все, если *x* – целое число. Если *x* – не целое, то в сумме $[x]+[k-x]$ не учтён ровно один из них: тот, который содержит точку *x*. Число *ka* не будет целым, если *a* – иррационально. Если *a* – рационально, то *ka* можно сделать целым.)**

7. Сколько существует троек натуральных чисел, не превосходящих 100, таких, что сумма их квадратов делится на 7? (*Порядок чисел в тройке не важен. Ответ дать числом в десятичной записи.*) **(<u>24108</u>. При делении на 7 квадрат целого числа даёт остатки 0 (14 чисел в первой сотне), 1 (29 чисел), 4 (29 чисел) и 2 (28 чисел), при этом они образуют цикл 1, 4, 2, 2, 4, 1, 0, который в сотне умещается 14 раз (первые 98 чисел). Перебор вариантов показывает, что возможны 2 случая делимости суммы на 7 – либо все остатки равны 0, либо они дают тройку (1, 2, 4). В первом случае количество троек равно 14 (если все числа равны) + 14·13 (если одно число встречается дважды) + $C_{14}^3 = \frac{14!}{3!\cdot 11!} = \frac{14\cdot 13\cdot 12}{6} = 14\cdot 13\cdot 2$. Во втором случае количество троек равно 29·28·29. Полученную сумму можно достаточно быстро посчитать в уме, например, следующим образом: $14+14\cdot 13+14\cdot 13\cdot 2+29\cdot 28\cdot 29=14\cdot(1+13+26)+(30-1)^2\cdot 28 =28\cdot(20+841)=7\cdot 4\cdot 861=7\cdot 3444=24108$.)**

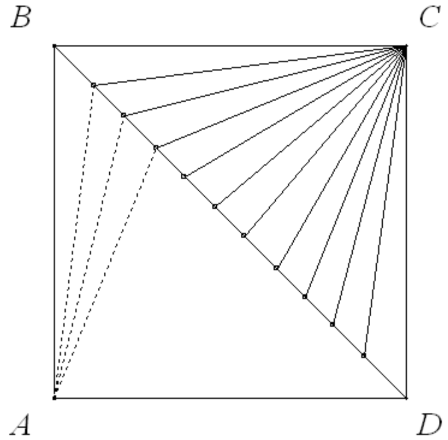
8. На координатной плоскости (0xy) даны точки *A*(0;0), *B* (3;3), *C* (8;3) и *D*(5;0). Напишите уравнение какой-нибудь прямой, которая проходит через точку пересечения диагоналей четырёхугольника *ABCD* и разбивает его на две части, из которых можно сложить ромб. **(<u>$y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}$ или в каноническом виде $3x-4y-6=0$</u>. Пусть *P*(4;1,5) – точка пересечения диагоналей четырёхугольника *ABCD*, который на самом деле является параллелограммом. Отметим на сторонах *BC* и *AD* точки *X* (6;3) и *Y*(2;0), тогда прямая *XY* проходит через центр исходного параллелограмма *ABCD*, т.е. через точку пересечения диагоналей *P*, и $XY=\sqrt{(6-2)^2+(3-0)^2}=5=BC=BX+XC$. Тогда из четырёхугольников *ABXY* и *YXCD* можно сложить ромб A_1B_1XY. Уравнение прямой *XY* найдём по координатам точек *X* и *Y*: $\frac{x-2}{6-2}=\frac{y-0}{3-0}$.)**



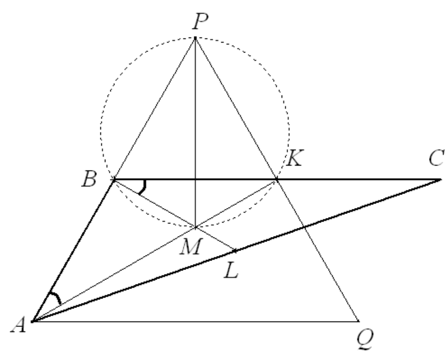
9. Решите уравнение $[x]+[2x]+[4x]+[8x]=2011$, где $[a]$ – целая часть числа *a*. **(<u>$134\frac{1}{8}\le x<134\frac{1}{4}$</u>. Докажем, что для любого натурального *k* верны оценки $k[x]\le[kx]\le k[x]+k-1$. Пусть $[x]=n$, $0\le\{x\}=\alpha<1$, $x=n+\alpha$, тогда $k[x]=kn=[kn]\le[kx]=[kn+k\alpha]\le kn+k\alpha<kn+k$, что и требовалось доказать. Таким образом, имеем $15[x]\le S=[x]+[2x]+[4x]+[8x]\le 15[x]+(1+3+7)=15[x]+11$, но $2011=15\cdot 134+1$, т.е. возможен только случай $[x]=134$, $[2x]=2\cdot 134$, $[4x]=4\cdot 134$, $[8x]=8\cdot 134+1$. Получаем систему из**

4 неравенств (∗) $134\le x<135$, $2\cdot134\le 2x<2\cdot134+1$, $4\cdot134\le 4x<4\cdot134+1$, $8\cdot134+1\le 8x<8\cdot134+2$, откуда получаем, что $134\frac{1}{8}\le x<134\frac{1}{4}$.)

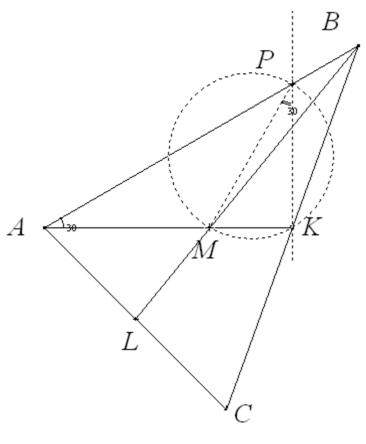
10. Внутри квадрата взяли 10 различных точек, после чего разрезали его на треугольники так, что вершинами треугольников являются только данные 14 точек (с учётом вершин квадрата) и каждая из этих 14 точек также является вершиной треугольников. Сколько могло получиться треугольников? **(<u>От 12 до 22 треугольников</u>. Заметим, что вершины квадрата дают в общую сумму углов треугольников вклад в 360°, а каждая из 10 отмеченных внутренних точек даёт вклад либо в 360° (если точка не лежит на стороне какого-нибудь треугольника), либо в 180° (если точка лежит на стороне треугольника). Тогда сумму всех углов треугольников равна 360°+180°·*n*, где *n* принимает целые значения от 10 до 20, отсюда находим, что число треугольников равно *n*+2. При этом все случаи от 12 до 22 треугольников реализуются, например, когда все 10 точек лежат на диагонали *BD* квадрата *ABCD*. Из примера в 12 треугольников (проведена диагональ *BD* и все внутренние точки соединены с вершиной *C*) получим все остальные примеры, проводя новые отрезки из вершины *A* поочерёдно к десяти внутренним точкам (см. рис.).)**



11. Про *n* натуральных чисел известно, что ровно в 2011 парах из них одно из чисел делится на другое. При каком наибольшем *n* среди них обязательно найдутся такие три числа *a*, *b* и *c*, что *a* делится на *b* и *b* делится на *c*? **(<u>89</u>. Покажем, что при $n\ge 90$ такая тройка не обязательно найдётся. Пусть множество А – это 45 различных простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_{45}$, множество В – это 44 первых числа множества А, умноженных на общее произведение всех 45 чисел, а число *c* – произведение квадратов первых 31 чисел множества А. Остальные из (*n*-90) чисел – другие различные простые числа. Тогда мы имеем ровно 2011 пар чисел с делимостью – это 44·45=1980 пар из чисел множеств В и А, а также 31 пара из числа *c* и 31 числа из А. Докажем теперь, что при $n\le 89$ найдётся нужная тройка чисел. Это следует из теоремы Турана, согласно которой в графе с *n* вершинами, в котором более $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ ребёр, обязательно найдётся цикл длины 3. В нашем случае, в графе делимости при $n\le 89$ вершин-чисел количество рёбер (делимости) $2011>\left[\frac{89^2}{4}\right]=1980$, а значит, есть цикл длины 3, т.е. в некоторой тройке натуральных чисел $a\ge b\ge c$ выполняется нужное нам условие, что *a* делится на *b* и *b* делится на *c*.)**



12. *AK* и *BL* – медианы треугольника *ABC*, в котором $\angle BAK=\angle CBL=30°$. Найдите углы треугольника *ABC*. **(Либо все углы по 60°, либо $\angle CAB=\arccos\frac{2}{\sqrt7}$, $\angle ABC=120°$, $\angle BCA=\arccos\frac{5}{2\sqrt7}$. Пусть прямая *AB* пересекается с прямой, проходящей через точку *K* перпендикулярно медиане *AK*, в точке *P*. 1). Если *P* окажется внутри стороны *AB*, то получим противоречие: $\angle MPK=30°>\angle MBK=\angle CBL=30°$, т.к. точка *B* окажется вне окружности, описанной около прямоугольного треугольника *MPK* (см. рис.). 2). Если *P*=*B*, то получим равносторонний треугольник *ABC*. 3). Если *P* окажется на луче *AB* за точкой *B*, то на продолжении отрезка *PK* за точку *K* отложим отрезок *KQ*=*PK*. Из прямоугольного треугольника *APK* находим, что $\angle APK=60°$. В треугольнике *APQ* высота *AK* является медианой, значит, этот треугольник – равнобедренный, а т.к. один из его углов равен**



60°, то треугольник APQ – равносторонний. Пусть M – точка пересечения медиан треугольника ABC, тогда AM/MK=2/1. Таким образом, точка M, лежащая на медиане треугольника APQ, делит её в отношении 2:1, считая от вершины. Значит, M – точка пересечения медиан треугольника APQ, т.е. центр этого правильного треугольника. Тогда $\angle KPM=30°=\angle KBM=\angle CBL$, поэтому точки M, K, P и B лежат на одной окружности, причём PM – диаметр этой окружности, т.к. $\angle PKM$=90°. Но тогда и $\angle PBM$=90°. Следовательно, $\angle ABC=\angle ABM + \angle MBK$=90°+30°=120°, тогда в ΔBPK есть два угла по 60° и он является равносторонним. Пусть сторона треугольника APQ равна $2a$. Тогда $AB=QK=BK=PQ/2=a$, $BC=2BK=2a$. По теореме косинусов находим, что

$$AC=\sqrt{AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos 120°}=\sqrt{a^2+4a^2+2a^2}=a\sqrt{7}.$$

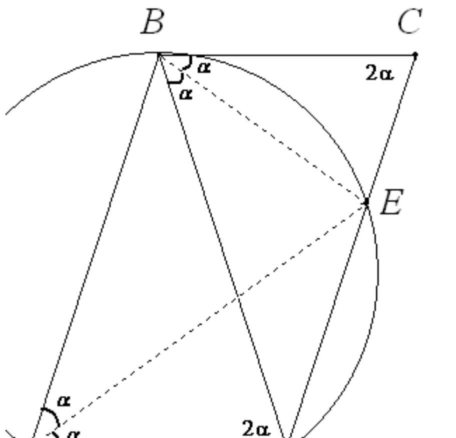
Тогда

$$\cos\angle ACB=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\cdot BC}=\frac{7a^2+4a^2-a^2}{2\sqrt{7}a\cdot 2a}=\frac{5}{2\sqrt{7}},$$

$$\cos\angle CAB=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{a^2+7a^2-4a^2}{2a\cdot\sqrt{7}a}=\frac{2}{\sqrt{7}}.$$ **)**

13. Решите уравнение $\sin^6 2x + \cos^6 2x=(\mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x)/2$. **($x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, где k - любое целое число. Левая часть положительна, поэтому tg$x$>0, тогда правая часть по неравенству Коши не меньше 1, причём равенство достигается только при tg$x$=1. Левая часть в свою очередь не больше $\sin^2 2x + \cos^2 2x=1$, причём равенство 1 достигается только при cos2x=0 или sin2x=0, т.е. при $2x=\pi n/2$, где n – целое число. С учётом tg$x$>0 получаем, что $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, где k - любое целое число.)**

14. Найдите все пары простых чисел p и q, для которых число $(7^p-2^p)(7^q-2^q)$ делится на pq. **((5,5); (5,11); (5,61); (11,5); (61;5). 1-ый случай: 7^p-2^p делится на p (случай 7^q-2^q делится на q аналогичен). Тогда по следствию из малой теоремы Ферма 7–2 делится на p, значит, p=5. Тогда или q=5, или 7^q-2^q не делится на q, т.е. 7^5-2^5=16775=25·11·61 делится на q, значит, q равно 11 или 61. 2-ой случай: 7^p-2^p не делится на p и 7^q-2^q не делится на q. Тогда 7^p-2^p делится на q, значит, p делит q–1, т.е. $q > p$. Аналогично из того, что 7^q-2^q делится на p, получаем, что $p > q$, значит, второй случай невозможен.)**



15. Найдите углы параллелограмма $ABCD$, в котором $AB=BD$ и биссектрисы углов DAB и DBC пересекаются на стороне CD. **(72° и 108°. Треугольники ABD и BDC – равные и равнобедренные (с углом при основании 2α), а $\angle DAE=\angle DBE$=α, где E – точка пересечения биссектрис углов DAB и DBC на стороне CD. Тогда $BEDA$ – вписанный четырёхугольник и $\angle BDE=\angle BAE$=α (как опирающиеся на одну дугу), значит, $\angle ADC$=3α=180°–2α, откуда α=180°/5=36°.)**

16. Даны 2011 множеств, каждое из которых состоит из 45 элементов, причём объединение любых двух множеств содержит ровно 89 элементов. Сколько элементов может содержать объединение всех этих 2011 множеств? **(44·2011+1=88485 элементов. По условию любые два множества пересекаются по одному элементу. Докажем, что все множества пересекаются по одному элементу. Предположим противное. Возьмём множество M_1. В нём найдётся элемент A, который принадлежит по крайней мере ещё 45-ти множествам – M_2, M_3, ..., M_{46}, т.к. в противном случае общее число множеств не превосходило бы 44·45+1=1981, что меньше 2011. По нашему предположению, имеется множество, не содержащее элемента A. Оно пересекается по одному элементу с множествами M_1, M_2, M_3, ..., M_{46} и поэтому содержит 46, а не 45 элементов. Противоречие.)**