VII Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». IV Турнир математических игр.

Игра «Домино». ***Младшая лига (7-9 класс).*** **Решения**. ***9 сентября 2011 года***

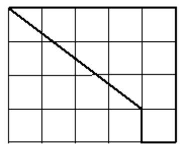
0-0. Сколько различных решений имеет уравнение *О·Р·Л·Ё·Н·О·К=2011? (Разные буквы – разные числа, одинаковые буквы – одинаковые числа.)* (**Бесконечно много. Действительно, достаточно очень внимательно прочитать условие задачи.☺**)

0-1. В банкомат попал вирус, и он, действуя по некоторой программе, дал Васе 3 рубля, Коле - 12, Ярославу - 33. А сколько рублей он дал Юре? (**32. Банкомат даёт каждому количество денег, равное порядковому номеру в алфавите первой буквы его имени.**)

0-2. Таракан Вася сказал, что умеет бегать со скоростью 50 м/мин. Но на самом деле Вася перепутал единицы измерения, решив, что в метре – 60 сантиметров, а в минуте – 100 секунд. Какова его настоящая скорость? *(Ответ дать в метрах в минуту.)* (**18 м/мин. Вася пробегает 50·60=3000 см за 100 секунд, то есть 30 см в секунду, что равно 30·60/100=18 м/мин.**)

0-3. Приведите пример таких трёх подряд идущих трёхзначных чисел, что между цифрами каждого из них можно расставить некоторым образом знаки арифметических действий (+, –, ×, :) так, чтобы все три полученных числовых выражения оказались равными. *(Запрещается ставить «–» перед первой цифрой и использовать скобки.)* (**Например, 514, 515, 516. Действительно, 5+1+4=5·1+5=5-1+6=10, а вообще выполняется равенство $a+1+b=a\cdot 1+(b+1)=a-1+(b+2)$.**)

0-4. Назовём натуральное число *замечательным*, если оно самое маленькое среди натуральных чисел с такой же, как у него, суммой цифр. Найдите 2011-ое по счёту *замечательное* число. (**49…99 (223 девятки). Для каждой возможной суммы цифр от 1 до 2011 есть ровно одно *замечательное* число, при этом нетрудно показать, что замечательные числа возрастают вместе с возрастанием суммы цифр, поэтому 2011-ое *замечательное* число имеет сумму цифр 2011. В нём не меньше 224 цифр и первая цифра не меньше 4, т.к. 223·9+4=2011. Поэтому для суммы цифр 2011 *замечательным* будет число 49…9 (223 девятки).**)

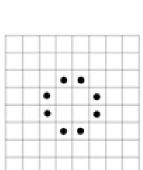


0-5. Нарисуйте пятиугольник с целочисленными сторонами, все вершины которого находятся в узлах клетчатой сетки со стороной 1. (**См. рис.**)

0-6. Известно, что квадратный трехчлен $x^2+px+q=0$ имеет корни x_1 и x_2, а квадратный трехчлен $x^2+x_1x+x_2=0$ имеет корни p и q. Укажите все четвёрки ненулевых чисел $\{p, q, x_1, x_2\}$ удовлетворяющих этому условию. (**$\{p=1;\ q=-2;\ x_1=1;\ x_2=-2\}$. По теореме Виета получаем систему:** $\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1x_2=q, \\ p+q=-x_1, \\ pq=x_2. \end{cases}$ **Так как числа ненулевые, то, разделив 4-ое уравнение на 2-ое, получим:** $p=\frac{1}{x_1}$. **Подставив в 1-ое, получим:** $-\frac{1}{x_1}-x_1=x_2$. **Тогда из 2-го:** $-1-x_1^2=q$; **а из 3-го:** $-1-x_1^2+\frac{1}{x_1}=-x_1 \Leftrightarrow (x_1-1)(x_1^2+1)=0$. **Последнее уравнение имеет только один действительный корень x_1=1, откуда найдём остальные числа.**)

1-1. Решите уравнение: $\frac{x^4+x^3-x^2+x-2}{x^2+x-2}=2$. (**$x=-1$. После деления на x^2+x-2 получим: $x^2+1=2$ (при этом x не равен 1 и –2). Но данное квадратное уравнение имеет корни 1 и –1, поэтому имеем единственное решение: $x=-1$.**)

1-2. Полтора землекопа выкопали полторы ямы за полтора часа. Сколько ям выкопают два землекопа за два часа? (**$2^2/_3$ ямы. Пусть за час «целый» землекоп выкапывает $1/x$ ямы. Тогда, по условию, $1{,}5\cdot(1{,}5/x)=1{,}5$, откуда $x=1{,}5=3/2$. Значит, за два часа два землекопа выкопают $2\cdot(2\cdot 2/3)=2^2/_3$ ямы.**)



1-3. При каком наибольшем n на шахматной доске можно расставить несколько ферзей так, чтобы каждый бил не менее n других? *Приведите ответ и пример.* (**n=4. См. рис.**

Рассмотрим самую верхнюю строку, на которой стоят ферзи, и выберем на ней самого правого ферзя. Он не может бить никого по четырём из восьми возможных направлений (вверх, вправо, вправо-вверх, влево-вверх). Значит, n≤4.)

1-4. В селе A – 100 детей, в селе $Б$ – 99. Расстояние между ними 10 км. На полпути между ними живёт Вася. Школа построена так, что сумма расстояний, проходимых всеми этими 200 детьми по дороге в школу наименьшая из возможных. Найдите наибольшее возможное значение расстояния от школы до A. **(<u>5 км</u>. Разобьём всех детей из A и 99 детей из $Б$ на пары учеников из разных сёл. Сумма расстояний, проходимых до школы детьми из одной пары не менее 10 км, а сумма расстояний, проходимых до школы сотым ребёнком из A и Васей не менее 10/2=5 км, причём равенство в обоих случаях достигается, когда школа находится на отрезке от дома Васи до A. Тогда сумма расстояний, проходимых всеми детьми до школы, будет наименьшей, и расстояние от школы до A будет не более 5 км, а максимум достигается в случае расположения школы в месте проживания Васи.)**

1-5. Найдите все пары натуральных чисел (a, b), состоящих из ненулевых цифр и таких, что $P(a)\vdots b$ и $P(b)\vdots a$, где $P(n)$ – произведение всех цифр числа n. **(<u>Все пары равных однозначных чисел</u>. Заметим, что все пары равных однозначных чисел подходят, а другие пары однозначных чисел – нет. Пусть, без ограничения общности, a≥10. Тогда $a=\overline{a_1a_2\ldots a_m}$ (m≥2). Отсюда $0<a_1a_2\ldots a_m\le 9^{m-1}\cdot a_1<10^{m-1}\cdot a_1\le\overline{a_1a_2\ldots a_m}=a$. Значит, если число a не однозначное, то произведение его цифр меньше самого числа. Таким образом, из условия делимости: $a>P(a)\ge b\ge P(b)\ge a$, что невозможно.)**

1-6. В стране 1000 аэродромов, все попарные расстояния между которыми различны. С каждого аэродрома взлетел один самолёт и совершил посадку на самом ближнем для него аэродроме. Какое наибольшее количество самолётов могло приземлиться на одном аэродроме? **(<u>5 самолётов</u>. Предположим, что на некотором аэродроме O приземлилось хотя бы 6 самолетов, вылетевших с аэродромов A, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Лучи OA, OA_1, OA_2, OA_3, OA_4, OA_5 делят плоскость на 6 углов, сумма которых равна 360°, откуда по принципу Дирихле наименьший из этих углов не больше 60°. Без ограничения общности, пусть $\angle AOA_1\le 60°$. Тогда $\angle AOA_1$ не является наибольшим углом в ΔAOA_1 (равенство углов в треугольнике невозможно по условию), откуда сторона AA_1 не является наибольшей стороной в ΔAOA_1. Пусть, без ограничения общности, сторона OA больше стороны AA_1. Но это противоречит тому, что аэродром O расположен ближе к A, чем аэродром A_1.)**

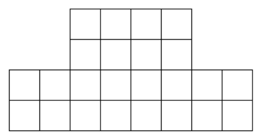
2-2. Решите в натуральных числах уравнение $a=d(d(\ldots(d(a))\ldots))$, где $d(a)$ – количество делителей числа a, повторяется a раз. **(<u>1 и 2</u>. Заметим, что, если n≥3, количество натуральных делителей числа n меньше его самого, значит, при a≥3, $d(d(\ldots(d(a))\ldots))\le d(a)<a$, поэтому a≤2.)**

2-3. В треугольнике две высоты равны 2 и 3, а площадь равна 1. Какие значения может принимать третья высота? **(<u>Такого треугольника не существует</u>. Пусть h_a=2, h_b=3. Тогда $2a=3b=ch_c=2S=2$, откуда, $a=1<h_b=3$, что невозможно.)**

2-4. Найдите остаток от деления числа $2002^{2011}+9^{2011}+2^{22}$ на 2011. **(<u>1369</u>. $2002^{2011}+9^{2011}=(2002+9)(2002^{2010}-2002^{2009}\cdot 9+\ldots-2002\cdot 9^{2009}+9^{2010})\vdots 2011$, поэтому $2002^{2011}+9^{2011}+2^{22}\equiv 2^{22}$(mod 2011), а $2^{22}=2^{11+11}=2048^2\equiv 37^2\equiv 1369$ (mod 2011).)**

2-5. Произведение пяти целых чисел не равно нулю. Каждое из них увеличили на единицу, но произведение не изменилось. Приведите пример таких пяти чисел. **(<u>Подойдут, например, числа 1, 1, -2, -3, -4</u>.)**

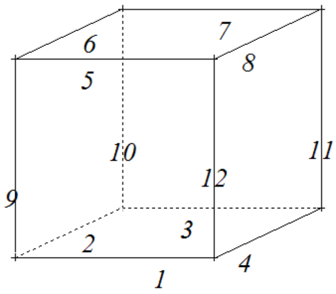
2-6. Приведите пример невыпуклого многоугольника, площадь которого численно равна периметру. **(<u>См. примеры на рис.</u>)**



3-3. В треугольнике две высоты не меньше сторон, к которым они проведены. Чему могут быть равны углы треугольника? **(<u>90°, 45°, 45°</u>. По условию, $a\le h_a$ и $b\le h_b$. Но так как перпендикуляр из точки к прямой всегда меньше наклонной, $a\le h_a\le b\le h_b\le a$, то стороны a и b равны и перпендикулярны. Значит, это равнобедренный прямоугольный треугольник.)**

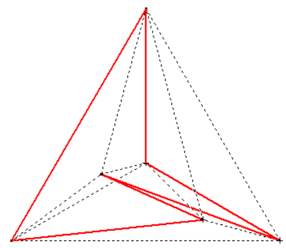
3-4. При каких целых n существуют ровно два таких целых m, что $3n^2+4m^2=8nm$? (**При чётных $n\neq 0$. Заметим, что данное уравнение равносильно равенству $(n-m)^2=n^2/4$. Отсюда следует, что m равно $n/2$ или $3n/2$, поэтому при $n=0$ существует только одно искомое m, при нечётном n искомых целых m не существует, а при всех чётных ненулевых n существуют ровно 2 различных целых m, удовлетворяющих условию.)**

3-5. Сколькими различными способами можно покрасить рёбра куба в 12 данных цветов так, чтобы в каждый цвет было покрашено ровно одно рёбро? *(Способы считаются различными, если их нельзя совместить в пространстве так, чтобы рёбра каждого из цветов совпали.)* (**11!. Занумеруем рёбра такого же куба так, как показано на рисунке. После этого расположим покрашенный куб так, чтобы ребро, покрашенное в цвет 1, совместилось с ребром 1, а другие рёбра просто совместились с некоторыми рёбрами этого куба. Для каждого способа покраски куба сделать данную операцию можно единственным образом. Поэтому количество способов покраски 11-ти фиксированных ребёр в 11 цветов, то есть 11!, и есть искомое количество.)**



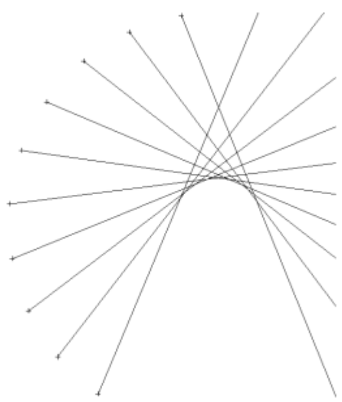
3-6. Многоугольник при повороте на 50° вокруг точки M перешёл сам в себя. Сколько у него может быть вершин? (**$36n$, где n – любое натуральное число. Пусть вершина A_1 перешла в A_2, A_2 в A_3 и т.д. Т.к. вершин конечное число, то в конце концов последняя вершина A_k из этой цепочки переходит в A_1. Значит, эти точки лежат на окружности с центром в M и радиусом MA_1, при этом k её дуг по 50° в сумме дают несколько полных окружностей, т.е. $360°\cdot m=50°\cdot k$, что равносильно уравнению $36m=5k$ в натуральных числах. 36 и 5 взаимно просты, значит, $k\,\vdots\,36$. Поэтому все вершины многоугольника разбиваются на несколько циклов, количества вершин в которых кратны 36. Поэтому количество вершин многоугольника делится на 36. Чтобы построить пример, для любого числа вида $36n$ достаточно взять правильный $36n$-угольник.)**

4-4. Три пушки начинают стрелять одновременно. Интервалы между выстрелами для этих пушек составляют 4/3 секунды, 5/3 секунды и 2 секунды соответственно. Совпавшие во времени выстрелы воспринимаются за один. Сколько выстрелов будет услышано за 1 минуту? *(Первый выстрел также считается.)* (**85. Первая пушка за минуту сделает 60:4/3+1=46 выстрелов. Вторая и третья - соответственно 37 и 31 выстрел. Выстрелы первой и второй совпадают через 20/3 секунды, и всего они совпадут 10 раз. Выстрелы первой и третьей – 16 раз, второй и третьей – 7 раз, а выстрелы всех трёх пушек совпадут 4 раза. Тогда согласно формуле включений-исключений будет услышано 46+37+31–10–16–7+4=85 выстрелов.)**



4-5. Приведите пример шестиугольника, никакие две диагонали которого не имеют общих точек (за исключением вершин). (**См. рис.)**

4-6. На какое наибольшее количество частей могут делить плоскость 10 лучей? Приведите ответ и пример. (**46. Будем проводить лучи по очереди. Докажем, что n-ный луч увеличивает количество частей не более, чем на $n-1$ ($n\geq 2$). Проведём n-ный луч и отметим его точки пересечения с другими лучами. Их не более чем $n-1$. Каждый отрезок между двумя соседними из этих точек проходит через одну часть, и делит её не более чем на две новых, то есть эти $n-2$ отрезка дают не более n-2 новых частей. Отрезок между началом этого луча и первой точки пересечения его с другим лучом не может добавить новой части. Луч, начинающийся в последней точке пересечения нашего луча с другими, также даёт не более одной новой части.**



Поэтому всего новых частей не более чем $n-1$. Теперь переходим к нашей задаче. После первого луча имеем одну часть – всю плоскость. По доказанному выше, после проведения 10-го луча плоскость разобьётся не более чем на $9\cdot 10/2+1=46$ частей. Пример несложно построить с

помощью 10 прямых общего положения (см. рис.). Легко заметить, что при такой конфигурации плоскость будет разделена ровно на 46 частей.)

5-5. Найдите все пары двузначных чисел (a, b), таких, что $2a^2+1=b^2$. **(<u>12, 17 и 70, 99</u>. b – нечётное число, большее 1, значит, $b=2k+1$ ($k\in N$). Тогда $b^2-1=2k(2k+2)=2a^2$. Отсюда $a^2 \vdots 2$, т.е. $a=2m$, где m – натуральное число, и $k(k+1)=2m^2$. Заметим, что k и $k+1$ – взаимно простые натуральные числа, а в квадрат натурального числа любой его простой делитель входит в чётной степени. Значит, одно из чисел k и $k+1$ – удвоенный точный квадрат, а другое – квадрат нечётного числа. С учётом условия $10\le b\le 99$, т.е. $5\le k\le 49$ получаем для случая k – квадрат нечётного числа три варианта: 9, 25, 49, и столько же для случая k – удвоенный квадрат: 8, 18, 32. Но 9+1=10 и 25+1=26 не являются удвоенными квадратами, а 18+1=19 и 32+1=33 – квадратами, поэтому остаются лишь две пары: $k=49$, $k+1=50$ и $k=8$, $k+1=9$, которые дают нам пары чисел (12, 17) и (70, 99) соответственно.)**

5-6. В посёлке живёт 2011 человек. Каждый из них на Новый год обменялся поздравлениями не менее, чем с k другими жителями. При каком наименьшем k гарантированно найдутся три человека, попарно обменявшиеся поздравлениями? **(<u>При $k=1006$</u>. Приведём контрпример на случай $k\le 1005$. Разделим жителей посёлка на 4 пронумерованные группы: в первых трёх по 503 человека, а в четвёртой 502, и расположим их по кругу. Сделаем так, что каждый человек обменялся поздравлениями со всеми людьми из двух соседних групп и только с ними. Тогда, очевидно, не найдутся три человека, обменявшиеся поздравлениями, и все поздравят не менее чем 1005 человек. Докажем, что при $k=1006$ всегда найдутся трое людей, обменявшихся поздравлениями. Рассмотрим любого человека A. Назовём тех, с кем он обменялся и не обменялся поздравлениями, *знакомыми* и *незнакомыми* соответственно. Тогда *знакомых* будет не менее 1006, а *незнакомых* не более 1004. Т.к. каждый *знакомый* обменялся поздравлениями, не считая A, не менее чем с 1005 людьми, то он обязательно обменялся поздравлениями с кем-то из *знакомых*. Эти двое вместе с A дают искомую тройку.)**

6-6. Приведите пример 100 различных натуральных чисел, таких, что их сумма равна их наименьшему общему кратному. *Покажите, почему требуемое условие выполняется.* **(<u>Можно взять числа 1, 3, 4, 8, ..., $3\cdot 2^{98}$, 2^{99} (на 2-ом месте - 3, на 99-м - $3\cdot 2^{98}$, на остальных – последовательные степени двойки)</u>. Сумма этих чисел равна $(2^{100}-1)+1+2\cdot 2^{98}=3\cdot 2^{99}$, и наименьшее общее кратное также равно $3\cdot 2^{99}$.)**