VII Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». IV Турнир математических игр.

Игра «Домино». ***<u>Старшая лига (10-11 класс).</u>*** **<u>Решения</u>**. ***9 сентября 2011 года***

0-0. Сколько различных решений имеет уравнение *О·Р·Л·Ё·Н·О·К=2011? (Разные буквы – разные числа, одинаковые буквы – одинаковые числа.)* (**<u>Бесконечно много</u>. Действительно, достаточно очень внимательно прочитать условие задачи.☺)**

0-1. Таракан Вася сказал, что умеет бегать со скоростью 50 м/мин. Но на самом деле Вася перепутал единицы измерения, решив, что в метре – 60 сантиметров, а в минуте – 100 секунд. Какова его настоящая скорость? *(Ответ дать в метрах в минуту.)* (**<u>18 м/мин</u>. Вася пробегает 50·60=3000 см за 100 секунд, то есть 30 см в секунду, что равно 30·60/100=18 м/мин.)**

0-2. Решите уравнение: $\frac{x^4+x^3-x^2+x-2}{x^2+x-2}=2$. (**<u>$x=-1$</u>. После деления на x^2+x-2 получим: $x^2+1=2$ (при этом x не равен 1 и –2). Но данное квадратное уравнение имеет корни 1 и –1, поэтому имеем единственное решение: $x=-1$.)**

0-3. Приведите пример таких трёх подряд идущих трёхзначных чисел, что между цифрами каждого из них можно расставить некоторым образом знаки арифметических действий (+, –, ×, :) так, чтобы все три полученных числовых выражения оказались равными. *(Запрещается ставить «–» перед первой цифрой и использовать скобки.)* (**<u>Например, 514, 515, 516</u>. Действительно, 5+1+4=5·1+5=5-1+6=10, а вообще выполняется равенство $a+1+b=a\cdot1+(b+1)=a-1+(b+2)$.)**

0-4. Назовём натуральное число *замечательным*, если оно самое маленькое среди натуральных чисел с такой же, как у него, суммой цифр. Найдите 2011-ое по счёту *замечательное* число. (**<u>49…99 (223 девятки)</u>. Для каждой возможной суммы цифр от 1 до 2011 есть ровно одно *замечательное* число, при этом нетрудно показать, что замечательные числа возрастают вместе с возрастанием суммы цифр, поэтому 2011-ое *замечательное* число имеет сумму цифр 2011. В нём не меньше 224 цифр и первая цифра не меньше 4, т.к. 223·9+4=2011. Поэтому для суммы цифр 2011 *замечательным* будет число 49…9 (223 девятки).)**

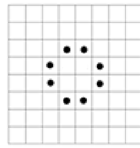
0-5. В треугольнике две высоты не меньше сторон, к которым они проведены. Чему могут быть равны углы треугольника? (**<u>90°, 45°, 45°</u>. По условию, $a\le h_a$ и $b\le h_b$. Но так как перпендикуляр из точки к прямой всегда меньше наклонной, $a\le h_a\le b\le h_b\le a$, то стороны a и b равны и перпендикулярны. Значит, это равнобедренный прямоугольный треугольник.)**

0-6. Известно, что квадратный трехчлен $x^2+px+q=0$ имеет корни x_1 и x_2, а квадратный трехчлен $x^2+x_1x+x_2=0$ имеет корни p и q. Укажите все четвёрки ненулевых чисел $\{p, q, x_1, x_2\}$ удовлетворяющих этому условию. (**<u>$\{p=1;\ q=-2;\ x_1=1;\ x_2=-2\}$</u>. По теореме Виета получаем систему: $\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1x_2=q, \\ p+q=-x_1, \\ pq=x_2. \end{cases}$ Так как числа ненулевые, то, разделив 4-ое уравнение на 2-ое, получим: $p=\frac{1}{x_1}$. Подставив в 1-ое, получим: $-\frac{1}{x_1}-x_1=x_2$. Тогда из 2-го: $-1-x_1^2=q$; а из 3-го: $-1-x_1^2+\frac{1}{x_1}=-x_1 \Leftrightarrow (x_1-1)(x_1^2+1)=0$. Последнее уравнение имеет только один действительный корень $x_1=1$, откуда найдём остальные числа.)**

1-1. Полтора землекопа выкопали полторы ямы за полтора часа. Сколько ям выкопают два землекопа за два часа? (**<u>$2^2/_3$ ямы</u>. Пусть за час «целый» землекоп выкапывает $1/x$ ямы. Тогда, по условию, $1{,}5\cdot(1{,}5/x)=1{,}5$, откуда $x=1{,}5=3/2$. Значит, за два часа два землекопа выкопают $2\cdot(2\cdot2/3)=2^2/_3$ ямы.)**

1-2. В селе *А* – 100 детей, в селе *Б* – 99. Расстояние между ними 10 км. На полпути между ними живёт Вася. Школа построена так, что сумма расстояний, проходимых всеми этими 200 детьми по дороге в школу наименьшая из возможных. Найдите наибольшее возможное значение расстояния от школы до *А*. (**<u>5 км</u>. Разобьём всех детей из *А* и 99 детей из *Б* на пары учеников из разных сёл. Сумма расстояний, проходимых до школы детьми из одной пары не менее 10 км, а сумма расстояний, проходимых до школы сотым ребёнком из *А* и Васей не менее 10/2=5 км, причём равенство в**

обоих случаях достигается, когда школа находится на отрезке от дома Васи до *A*. Тогда сумма расстояний, проходимых всеми детьми до школы, будет наименьшей, и расстояние от школы до *A* будет не более 5 км, а максимум достигается в случае расположения школы в месте проживания Васи.)



1-3. При каком наибольшем *n* на шахматной доске можно расставить несколько ферзей так, чтобы каждый бил не менее *n* других? *Приведите ответ и пример.* (**<u>*n*=4. См. рис</u>. Рассмотрим самую верхнюю строку, на которой стоят ферзи, и выберем на ней самого правого ферзя. Он не может бить никого по четырём из восьми возможных направлений (вверх, вправо, вправо-вверх, влево-вверх). Значит, *n*≤4.)**

1-4. Найдите все пары натуральных чисел *(a, b)*, состоящих из ненулевых цифр и таких, что *P(a)*⁝*b* и *P(b)*⁝*a,* где *P(n)* – произведение всех цифр числа *n*. (**<u>Все пары равных однозначных чисел</u>. Заметим, что все пары равных однозначных чисел подходят, а другие пары однозначных чисел – нет. Пусть, без ограничения общности, *a*≥10. Тогда** $a=\overline{a_1a_2\ldots a_m}$ **(*m*≥2). Отсюда 0<**$a_1a_2\ldots a_m\le 9^{m-1}\cdot a_1<10^{m-1}\cdot a_1\le\overline{a_1a_2\ldots a_m}=a$ **. Значит, если число *a* не однозначное, то произведение его цифр меньше самого числа. Таким образом, из условия делимости: *a*>*P(a)*≥*b*≥*P(b)*≥*a*, что невозможно.)**

1-5. Произведение пяти целых чисел не равно нулю. Каждое из них увеличили на единицу, но произведение не изменилось. Приведите пример таких пяти чисел. **(<u>Подойдут, например, числа 1, 1, -2, -3, -4</u>.)**

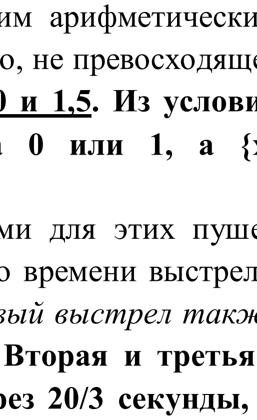
1-6. Многоугольник при повороте на 50° вокруг точки *M* перешёл сам в себя. Сколько у него может быть вершин? (**<u>36*n*, где *n* – любое натуральное число</u>. Пусть вершина A_1 перешла в A_2, A_2 в A_3 и т.д. Т.к. вершин конечное число, то в конце концов последняя вершина A_k из этой цепочки переходит в A_1. Значит, эти точки лежат на окружности с центром в *M* и радиусом MA_1, при этом *k* её дуг по 50° в сумме дают несколько полных окружностей, т.е. 360°·*m*=50°·*k*, что равносильно уравнению 36*m*=5*k* в натуральных числах. 36 и 5 взаимно просты, значит, *k*⁝36. Поэтому все вершины многоугольника разбиваются на несколько циклов, количества вершин в которых кратны 36. Поэтому количество вершин многоугольника делится на 36. Чтобы построить пример, для любого числа вида 36*n* достаточно взять правильный 36*n*-угольник.)**

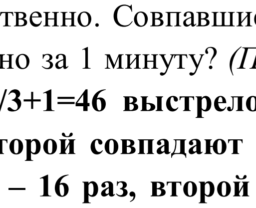
2-2. Найдите остаток от деления числа $2002^{2011}+9^{2011}+2^{22}$ на 2011. (**<u>1369</u>. $2002^{2011}+9^{2011}=(2002+9)(2002^{2010}-2002^{2009}\cdot 9+\ldots-2002\cdot 9^{2009}+9^{2010})$⁝2011, поэтому $2002^{2011}+9^{2011}+2^{22}\equiv 2^{22}$(mod 2011), а $2^{22}=2^{11+11}=2048^2\equiv 37^2\equiv 1369$ (mod 2011).)**

2-3. В треугольнике две высоты равны 2 и 3, а площадь равна 1. Какие значения может принимать третья высота? (**<u>Такого треугольника не существует</u>. Пусть h_a=2, h_b=3. Тогда 2*a*=3*b*=ch_c=2*S*=2, откуда, *a*=1<h_b=3, что невозможно.)**

2-4. Найдите все действительные числа *x*, целая часть которых является средним арифметическим самого числа и его дробной части. Целая часть числа [*x*] – наибольшее целое число, не превосходящее *x*; дробная часть числа {*x*} – это разность самого числа *x* и его целой части. (**<u>0 и 1,5</u>. Из условия следует, что [x]=(x+{x})/2=([x]+2{x})/2, значит, [x]=2{x}. Тогда [x] равна 0 или 1, а {x} соответственно равна 0 и 0,5.)**

2-5. Три пушки начинают стрелять одновременно. Интервалы между выстрелами для этих пушек составляют 4/3 секунды, 5/3 секунды и 2 секунды соответственно. Совпавшие во времени выстрелы воспринимаются за один. Сколько выстрелов будет услышано за 1 минуту? *(Первый выстрел также считается.)* (**<u>85</u>. Первая пушка за минуту сделает 60:4/3+1=46 выстрелов. Вторая и третья - соответственно 37 и 31 выстрел. Выстрелы первой и второй совпадают через 20/3 секунды, и всего они совпадут 10 раз. Выстрелы первой и третьей – 16 раз, второй и третьей – 7 раз, а выстрелы всех трёх пушек совпадут 4 раза. Тогда согласно формуле включений-исключений будет услышано 46+37+31–10–16–7+4=85 выстрелов.)**





2-6. Приведите пример невыпуклого многоугольника, площадь которого численно равна периметру. **(<u>См. примеры на рис.)</u>**

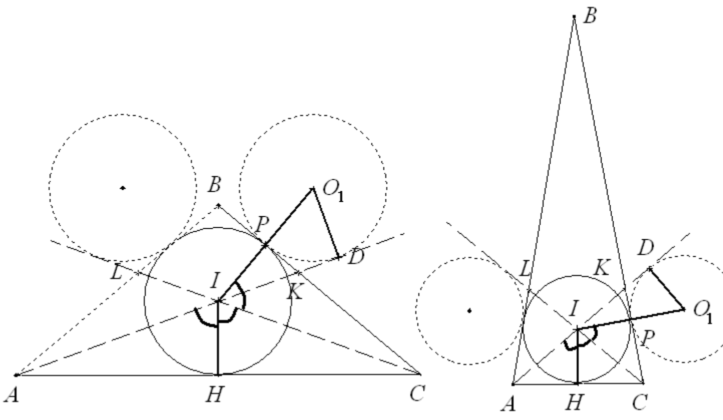
3-3. При каких целых n существуют ровно два таких целых m, что $3n^2+4m^2=8nm$? **(<u>При чётных $n\neq 0$</u>. Заметим, что данное уравнение равносильно равенству $(n-m)^2=n^2/4$. Отсюда следует, что m равно $n/2$ или $3n/2$, поэтому при $n=0$ существует только одно искомое m, при нечётном n искомых целых m не существует, а при всех чётных ненулевых n существуют ровно 2 различных целых m, удовлетворяющих условию.)**

3-4. Найдите все пары положительных чисел a и b таких, что уравнения $ax+b=1$ и $\frac{x}{a}+\frac{1}{b}=1$ имеют общий корень. **(<u>a – любое положительное число, b=1</u>. Если x=0 – общий корень, то b=1, a – любое положительное число. Если $x\neq 0$, тогда $\frac{x}{a}=1-\frac{1}{b}=\frac{b-1}{b}=\frac{-ax}{b}$, откуда $b=-a^2$, что для положительных чисел не выполняется.)**

3-5. В классе 30 учеников. На каждом уроке физкультуры учитель делит класс на 2 команды, играющие друг против друга. Какое наименьшее количество уроков можно провести так, чтобы каждые два ученика хотя бы раз сыграли друг против друга? **(5. Закодируем каждого школьника двоичным кодом из 1 и 0 (1 – играл в первой команде, 0 – играл во второй команде), тогда у школьников должны быть разные коды, а кодов длины n будет ровно 2^n, значит, $n\geq 5$. Для 5 уроков в качестве примера можно привести набор из 30 двоичных пятизначных кодов (без кодов 00000 и 11111), при этом ещё и каждый раз в каждой команде будет ровно по 15 человек.)**

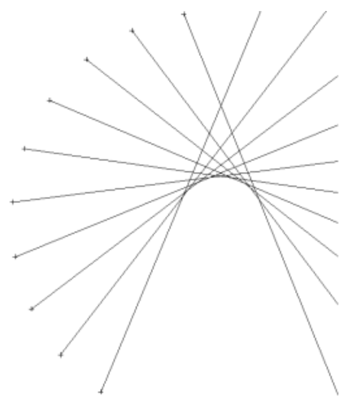
3-6. Найдите все пары двузначных чисел (a, b), таких, что $2a^2+1=b^2$. **(<u>12, 17 и 70, 99</u>. b – нечётное число, большее 1, значит, $b=2k+1$ ($k\in N$). Тогда $b^2-1=2k(2k+2)=2a^2$. Отсюда $a^2\vdots 2$, т.е. $a=2m$, где m – натуральное число, и $k(k+1)=2m^2$. Заметим, что k и $k+1$ – взаимно простые натуральные числа, а в квадрат натурального числа любой его простой делитель входит в чётной степени. Значит, одно из чисел k и $k+1$ – удвоенный точный квадрат, а другое – квадрат нечётного числа. С учётом условия $10\leq b\leq 99$, т.е. $5\leq k\leq 49$ получаем для случая k – квадрат нечётного числа три варианта: 9, 25, 49, и столько же для случая k – удвоенный квадрат: 8, 18, 32. Но 9+1=10 и 25+1=26 не являются удвоенными квадратами, а 18+1=19 и 32+1=33 – квадратами, поэтому остаются лишь две пары: k=49, k+1=50 и k=8, k+1=9, которые дают нам пары чисел (12, 17) и (70, 99) соответственно.)**

4-4. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB=BC$) продолжения биссектрис AK и CL касаются окружностей, симметричных вписанной окружности треугольника относительно сторон BC и AB соответственно. Найдите углы треугольника ABC. **(<u>100°, 40°, 40° или 20°, 80°, 80°</u>. Введём обозначения как на рисунке. Тогда $DO_1=r$, $IO_1=2\cdot IP=2r$, где r – радиус вписанной окружности, D – точка касания биссектрисы AK с соответствующей симметричной окружностью с центром O_1, поэтому в прямоугольном треугольнике DO_1I острые углы равны 30° и 60°. Следовательно, в первом случае больший развёрнутого $\angle AIO_1$=180°+30°=210° состоит из трёх равных углов по 70° ($\angle AIH=\angle HIC=\angle CIP$, что следует из равенства прямоугольных треугольников AIH, HIC и CIP), значит, $\angle ICH$=90°–70°=20°, т.е. $\angle C=2\angle ICH$=40°. А во втором случае $\angle AIO_1$=180°–30°=150° состоит из трёх равных углов по 50°, тогда $\angle ICH$=90°–50°=40°, т.е. $\angle C=2\angle ICH$=80°.)**



4-5. Приведите пример 100 попарно различных натуральных чисел, таких, что их сумма равна их наименьшему общему кратному. *Покажите, почему требуемое условие выполняется.* **(<u>Можно взять числа 1, 3, 4, 8, ..., $3\cdot 2^{98}$, 2^{99} (на 2-ом месте - 3, на 99-м - $3\cdot 2^{98}$, на остальных – последовательные степени двойки)</u>. Сумма этих чисел равна $(2^{100}-1)+1+2\cdot 2^{98}=3\cdot 2^{99}$, и наименьшее общее кратное также равно $3\cdot 2^{99}$.)**

4-6. На какое наибольшее количество частей могут делить плоскость 10 лучей? Приведите ответ и пример. (**<u>46</u>. Будем проводить лучи по очереди. Докажем, что *n*-ный луч увеличивает количество частей не более, чем на *n*−1 (*n*≥2). Проведём *n*-ный луч и отметим его точки пересечения с другими лучами. Их не более чем *n*−1. Каждый отрезок между двумя соседними из этих точек проходит через одну часть, и делит её не более чем на две новых, то есть эти *n*−2 отрезка дают не более *n*-2 новых частей. Отрезок между началом этого луча и первой точки пересечения его с другим лучом не может добавить новой части. Луч, начинающийся в последней точке пересечения нашего луча с другими, также даёт не более одной новой части. Поэтому всего новых частей не более чем *n*−1. Теперь переходим к нашей задаче. После первого луча имеем одну часть – всю плоскость. По доказанному выше, после проведения 10-го луча плоскость разобьётся не более чем на 9·10/2+1=46 частей. Пример несложно построить с помощью 10 прямых общего положения (см. рис.). Легко заметить, что при такой конфигурации плоскость будет разделена ровно на 46 частей.**)



5-5. В посёлке живёт 2011 человек. Каждый из них на Новый год обменялся поздравлениями не менее, чем с *k* другими жителями. При каком наименьшем *k* гарантированно найдутся три человека, попарно обменявшиеся поздравлениями? (**<u>При *k*=1006</u>. Приведём контрпример на случай *k*≤1005. Разделим жителей посёлка на 4 пронумерованные группы: в первых трёх по 503 человека, а в четвёртой 502, и расположим их по кругу. Сделаем так, что каждый человек обменялся поздравлениями со всеми людьми из двух соседних групп и только с ними. Тогда, очевидно, не найдутся три человека, обменявшиеся поздравлениями, и все поздравят не менее чем 1005 человек. Докажем, что при *k*=1006 всегда найдутся трое людей, обменявшихся поздравлениями. Рассмотрим любого человека *A*. Назовём тех, с кем он обменялся и не обменялся поздравлениями, *знакомыми* и *незнакомыми* соответственно. Тогда *знакомых* будет не менее 1006, а *незнакомых* не более 1004. Т.к. каждый *знакомый* обменялся поздравлениями, не считая *A*, не менее чем с 1005 людьми, то он обязательно обменялся поздравлениями с кем-то из *знакомых*. Эти двое вместе с *A* дают искомую тройку.**)

5-6. Найдите наибольшее составное число *n* такое, что если $a_1+a_2+\ldots+a_{1000}=n$ при некоторых натуральных $a_1, a_2, \ldots, a_{1000}$, то эти 1000 чисел взаимно просты в совокупности. (**<u>$n=997^2=994009$</u>. Если у *n* есть натуральный делитель, не больший *n*/1000 (не равный 1), тогда, очевидно, что существуют $a_1, a_2, \ldots, a_{1000}$, противоречащие условию. Значит, любой натуральный делитель *n* больше *n*/1000. Рассмотрим любой делитель *n*, меньший *n*. Обозначим его *d*. Тогда *n*/*d*>*n*/1000, (т.к. *n*/*d* – некоторый натуральный делитель *n*), откуда 1000>*d*. Значит, любой простой делитель *n* не больше 997. Предположим, что у *n* есть простой делитель *d'*, меньший 997, т.е. не больший 991. Тогда 991≥*d'*>*n*/1000, откуда *n*<991000<994009. Если же у *n* есть только один простой делитель – 997, то $n=997^2=994009$ (иначе у *n* есть делитель 997^2, больший 1000 и не равный *n*). Как мы видим, это значение наибольшее, и оно подходит.**)

6-6. Сколько различных решений у неравенства *О·Р·Л·Ё·Н·О·К*≤2011*? (Разные буквы - разные цифры, одинаковые буквы – одинаковые цифры.)* (**<u>93120</u>. 1). Если в левой части есть 0, имеем 6·(9·8·7·6·5) решений. 2). Пусть в левой части нет нуля. Если *О*≥3, *О·Р·Л·Ё·Н·О·К*≥3^2·1·2·4·5·6=2160>2011. Перепишем неравенство в виде (*О·Р·Л·Ё·Н·К)·О*≤2011. Если *О*=2, *Р·Л·Ё·Н·К*≤[2011/4]=502. Тогда произведение любых двух цифр в левой части меньше 42, иначе *Р·Л·Ё·Н·К*≥42·1·3·4=504>502. Таких наборов различных цифр 3: 1, 3, 4, 5, 6; 1, 3, 4, 5, 7; 1, 3, 4, 5, 8. Для каждого из трёх случаев по 5! различных решений. Если *О*=1, *Р·Л·Ё·Н·К*≤2011. Этому удовлетворяют ещё 17 наборов различных цифр, больших 1 (что получим перебором). Это все $C_5^2=\frac{5!}{2!\cdot 3!}=10$ наборов с тремя наименьшими цифрами 2, 3, 4; $C_4^2-1=5$ наборов с тремя наименьшими цифрами 2, 3, 5; а также 2 набора с тремя наименьшими цифрами 2, 4, 5, то есть ещё 17·5! различных решений. Итак, всего 17·5!+3·5!+6·(9·8·7·6·5)=2400+90720=93120 решений.**)