VIII Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». Турнир математических игр.

Математическая игра «Суворовские Альпы».

<u>Младшая лига (7-9 класс).</u> **<u>Решения</u>. *9 сентября 2012 года***

1. На стороне BC треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая отрезок AB в точке D. Найдите отношение площадей треугольников ABC и BCD, если известно, что AC=15, BC=20 и $\angle ABC = \angle ACD$. (**<u>25/16</u>. Треугольник ABC подобен треугольнику ACD, значит, $\angle ACB=\angle ADC=90°$ и CD – высота прямоугольного треугольника ACB, проведённая из вершины прямого угла. Тогда $CD=AC\cdot BC/AB=12$. Треугольник ABC подобен треугольнику CBD с коэффициентом AC/CD =15/12=5/4. Следовательно, их площади относятся как $(5/4)^2$.)**

2. На какую наибольшую степень двойки делится произведение $1007\cdot1008\cdot1009\cdot\ldots\cdot2011\cdot2012$? (**<u>На 1006-ю степень</u>, т.к. для любого натурального n произведение $(n+1)\cdot\ldots\cdot2n=(2n)!/n!=(2n-1)!!\cdot(2n)!!/n!=(2n-1)!!\cdot2^n$ – нечётное число, умноженное на 2^n; где двойной факториал есть произведение всех натуральных чисел одной (с основанием факториала) чётности, не превосходящих основания факториала.)**

3. На поле $e1$ шахматной доски стоит шашка. Сколько существует различных маршрутов, по которым она сможет пройти в дамки? *Каждым своим ходом шашка сдвигается на одну клетку вверх по диагонали либо вправо, либо влево.* (**<u>103</u>. Так как шашка ходит по диагонали, то она всё время остается на клетках одного цвета (в данном случае чёрного). Пусть некоторая черная клетка x находится не на первой горизонтали. Если при этом она находится на крайней вертикали, то пойти на эту клетку можно только с одной клетки y, поэтому маршрутов от клетки $e1$ до клетки x существует столько же, сколько от $e1$ до клетки y. Если клетка x находится не на крайней вертикали, то пойти на нее можно из двух клеток, причем если к этим клеткам от $e1$ приводило m и n маршрутов, то к клетке x от $e1$ ведет $m+n$ маршрутов. Двигаясь последовательно от второй до восьмой горизонтали, поставим в каждую из клеток, в которые может попасть шашка, число, равное количеству приводящих в неё маршрутов. Таким образом, количество маршрутов, приводящих к клеткам восьмой горизонтали: 20+35+34+14=103.)**

8		20		35		34		14
7	5		15		20		14	
6		5		10		10		4
5	1		4		6		4	
4		1		3		3		1
3			1		2		1	
2				1		1		
1					0			
	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*

4. Сколько существует четырёхзначных чисел, в каждом из которых все цифры различны и каждое из которых делится на 2, 5, 9 и 11? (**<u>8 чисел</u>. Числа 2, 5, 9 и 11 – попарно взаимно просты, поэтому если число делится на каждое из них, то оно делится и на их произведение, т.е. искомое число делится на $2\cdot5\cdot9\cdot11=990$. Выпишем все четырёхзначные числа, которые делятся на 990. 1980, 2970, 3960, 4950, 5940, 6930, 7920, 8910, 9900. Под наше условие различных цифр подходят первые восемь чисел этого списка.)**

5. Два мудреца играют в следующую игру. Выписаны числа 0, 1, 2,..., 1024. Первый мудрец зачёркивает 512 чисел (по своему выбору), второй зачёркивает 256 из оставшихся, затем снова первый зачёркивает 128 чисел и т.д. На десятом шаге второй мудрец зачёркивает одно число; остаются два числа. После этого второй мудрец платит первому разницу между этими числами. Сколько уплатит второй мудрец первому, если оба будут играть наилучшим образом? (**<u>32</u>. Укажем такую стратегию первого игрока, которая независимо от ходов второго гарантирует, что разность оставшихся двух чисел будет не меньше 32. Эта стратегия описывается очень просто: при каждом ходе вычёркивать числа через одно, то есть вычёркивать второе, четвёртое, шестое, ..., число из оставшихся (мы считаем, что числа расположены в порядке возрастания). Тогда после 1-го хода разность между любыми соседними из оставшихся чисел будет не меньше 2, после 2-го – не меньше 4, после 3-го – не меньше 8, после 4-го – не меньше 16 и после 5-го – не меньше 32. Теперь укажем стратегию второго игрока, которая независимо от ходов первого позволит ему проиграть не больше 32. Она состоит в следующем. Первым ходом он вычёркивает все числа, меньшие 512, или все числа, большие 512 (ясно, что или тех, или других осталось не больше 256). После этого разность между крайними из оставшихся чисел будет не больше 512. Аналогично вторым ходом он может добиться того, что все оставшиеся числа будут находиться только в одном из отрезков [0, 256]; [256, 512]; [512, 768]; [768, 1024], то есть уменьшить разность между крайними числами по крайней мере до 256. Точно так же 3-м ходом он может уменьшить эту разность до 128, 4-м – до 64 и 5-м – до 32.)**

6. Найдите наименьшее натуральное число, делящееся на 36, в записи которого встречаются все 10 цифр. (**<u>1023457896</u>**)

7. В клетках квадрата 3×3 расставьте 9 цифр (необязательно различных) так, что окажутся точными квадратами все 7 трёхзначных чисел, получаемых в строках (при прочтении слева направо), в столбцах (сверху вниз) и главной диагонали (слева сверху – вправо вниз). (**<u>пример в таблице справа</u>**)

4	**4**	**1**
4	**0**	**0**
1	**0**	**0**

8. Кузнечик прыгает на плоскости, при этом каждый его новый прыжок по длине отличается от предыдущих прыжков, и после каждого прыжка он обязательно поворачивает на 90° в какую-нибудь сторону. За какое наименьшее количество прыжков кузнечик может вернуться в начальную точку? Приведите ответ и пример. (**<u>6 прыжков</u>. Можно считать, что у кузнечика существуют вертикальные и горизонтальные прыжки на плоскости, но тогда в каждом из этих двух направлений он должен сделать не менее трёх прыжков (сдвинувшись в каком-то направлении, нельзя совершить прыжок такой же длины в противоположном направлении). Пример на 6 прыжков – вверх на 1, вправо на 9, вверх на 2, влево на 4, вниз на 3, влево на 5.)**

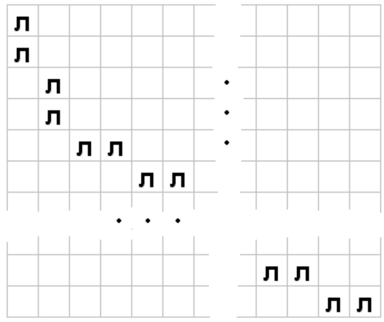
9. Произведение всех натуральных делителей натурального числа N равно N^{100}. Сколько этих делителей у числа N? (**<u>200 или 1</u>. Если у числа N чётное количество делителей, то они разбиваются на пары так, что произведение чисел в каждой паре равно N. Следовательно, таких пар 100, а всего делителей – 200. Если у N нечётное количество делителей, то они аналогично разбиваются на пары все, кроме одного - $\sqrt{N}$. Тогда $\sqrt{N}$ является целой неотрицательной степенью числа N, откуда N=1, и у него 1 натуральный делитель.)**

10. При каких a уравнение $||x+1|-|x+2||=a$ имеет решение? (**При $0 \le a \le 1$. Разница расстояний на числовой прямой от точки x до точек (–1) и (–2), каковыми являются числа $|x+1|=|x-(-1)|$ и $|x+2|=|x-(-2)|$, не превышает 1.)**

11. Сколько существует различных треугольников с целочисленными сторонами, в которых одна из биссектрис делит противоположную сторону на отрезки длиной 2012 и 2011? (**<u>4021</u>. Пусть биссектриса CK треугольника ABC делит сторону AB на отрезки AK=2012 и KB=2011; $BC=a$, $AC=b$. По условию, $a/2011=b/2012 \Leftrightarrow 2012a=2011b$, и,**

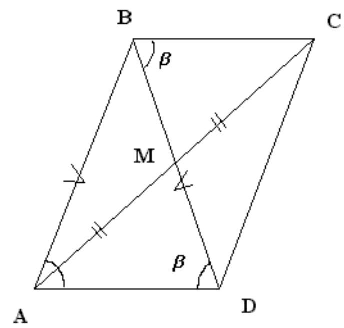
в силу целочисленности сторон, $b\vdots 2012$. По неравенству треугольника $a+4023=2011b/2012+4023>b$ и $a+b=2011b/2012+b=4023b/2012>4023=AB$, откуда $4023\cdot 2012>b>2012$. Из вышесказанного получаем, что $b=2012k$, где k – натуральное, $2\le k\le 4022$, и, соответственно, $a=2011k$. Несложно проверить, что все такие треугольники подходят, и они различны.)

12. Назовём натуральное число *би-простым*, если оно является произведением двух различных простых чисел. Каково наибольшее количество последовательных чисел, все из которых – би-простые? Приведите ответ и пример. **(Три, например, $33=3\cdot 11$, $34=2\cdot 17$, $35=5\cdot 7$. Одно из четырёх последовательных чисел делится на 4, значит, оно не будет би-простым, поэтому четырёх последовательных интересных чисел не существует.)**



13. На доске $30\times n$ расставлено несколько ладей таким образом, что каждая ладья бьёт ровно одну ладью. При этом в каждой вертикали и в каждой горизонтали стоит хотя бы одна ладья. При каких n такое возможно? **($15\le n\le 60$, где $n\vdots 3$. Назовём рядом и горизонталь (их 30), и вертикаль (их n). Ладья полностью пробивает два ряда, при этом ладьи делятся на пары бьющих друг друга, тогда каждая пара бьёт ровно три ряда (т.к. один ряд – общий), причём разные пары бьют разные тройки рядов. Следовательно, число рядов кратно трём, т.к. все ряды заняты и должны разбиться на тройки. Кроме того, каждая пара пробивает либо 1, либо 2 из 30 горизонталей. Значит, количество пар ладей будет от 15 до 30, тогда всего должно быть от $15\cdot 3=45$ до $30\cdot 3=90$ рядов, т.е. $15\le n\le 60$. И для каждого из этих случаев есть свой вариант расположения ладей, когда сначала мы ставим k пар ладей вертикально подряд, начиная сверху вниз и справа налево, а затем $(30-2k)$ пар горизонтально, где $k=(60-n)/3$, см. пример-рисунок, для $k=2$.)**

14. В треугольнике ABC медиана BM равна половине стороны AB. Какие значения может принимать $\angle ABC$? **($90°<\angle ABC<180°$. Достроим треугольник до параллелограмма $ABCD$, тогда ΔABD окажется равнобедренным ($BD=2BM=AB$) и $\angle BAD=\angle BDA=\angle CBD=\beta<90°$ - как угол при основании равнобедренного треугольника. Значит, $\angle ABC=180°-\angle BAD=180°-\beta$, откуда и получим нужные ограничения на $\angle ABC$, при этом любое значение угла в данном диапазоне достижимо.)**



15. На плоскости отмечено 100 точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Некоторые пары точек соединены отрезками. Известно, что никакая тройка отрезков не образует треугольника. Какое наибольшее число отрезков могло быть проведено? **(2500. Выберем точку А, из которой исходит наибольшее число отрезков. Обозначим это число отрезков за n. Рассмотрим n точек, которые соединены с точкой A. Ни для какой пары B, C из этих n точек отрезок BC не проведен, иначе были бы проведены три отрезка AB, BC, CA, которые образуют треугольник. Таким образом, из каждой точки, соединенной отрезком с точкой A, выходит не больше, чем $100-n$ отрезков. Из каждой из $100-n$ точек, не соединенных с точкой A (включая саму точку A), выходит не более n отрезков (по предположению максимальности количества выходящих из A отрезков). Таким образом, общее число отрезков,**

выходящих из всех точек, не превосходит *n*(100-*n*)+(100-*n*)*n* отрезков. Поскольку каждый отрезок выходит из двух точек, всего проведено не более *n*(100-*n*) отрезков. Используя неравенство о средних (*xy* не больше $(x+y)^2/4$ при положительных *x* и *y*), получим, что отрезков не больше, чем $(n+(100-n))^2/4=100^2/4=2500$. Пример с 2500 отрезками строится следующим образом: отмеченные точки делятся на 2 группы по 50 точек и каждая пара точек из разных групп соединяется отрезком. *Примечание: фактически приведено доказательство теоремы Турана в частном случае.*)

16. Какую площадь может иметь выпуклый пятиугольник, все вершины которого расположены в узлах целочисленной решётки? **(*n*/2, где *n* – натуральное число, не меньшее 5. По формуле Пика площадь многоугольника с целочисленными узлами $s=a+b/2-1$, где *a* - количество узлов внутри, *b* - количество узлов на границе, т.е. площадь будет полуцелой или целой. Каждая из пяти вершин располагается в узле одного из 4 типов по чётности: «чёт-чёт», «неч-неч», «чёт-неч», «неч-чёт». По принципу Дирихле найдутся 2 вершины с узлами одного типа. Поэтому в середине отрезка, их соединяющего, находится узел решётки. Тогда в силу выпуклости этот узел находится внутри пятиугольника или на его стороне. Если он находится на стороне пятиугольника, то тогда вместо одной из вершин возьмём этот узел (соединим его с 4-мя другими вершинами так, чтобы получился выпуклый пятиугольник). Площадь нового пятиугольника будет меньше, чем площадь исходного по крайней мере на 1/2. Снова воспользуемся эти алгоритмом, пока не возникнет пятиугольник, у которого такой узел попал внутрь. Получим, что площадь исходного пятиугольника не менее 1+5/2-1=5/2. При этом все варианты с площадью *n*/2, где *n*≥5 – натуральное число, существуют, например, можно увеличивать площадь пятиугольников на ½ , как на рисунке.)**