VIII Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». Турнир математических игр.
Математическая игра «Суворовские Альпы».

<u>Старшая лига (10-11 класс).</u> **<u>Решения</u>**. ***9 сентября 2012 года***

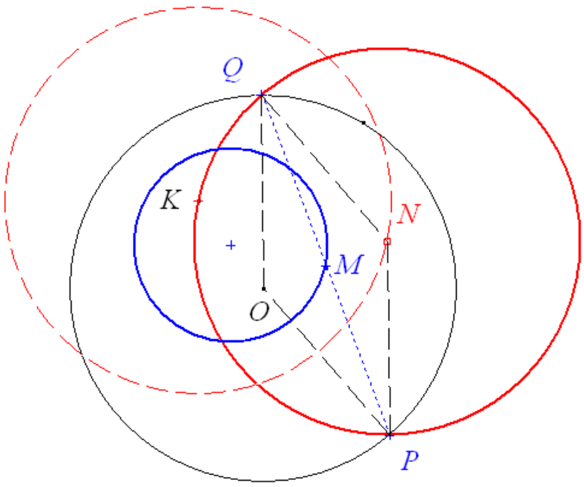
1. На стороне BC треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая отрезок AB в точке D. Найдите отношение площадей треугольников ABC и BCD, если известно, что AC=15, BC=20 и $\angle ABC = \angle ACD$. (**<u>25/16</u>. Треугольник ABC подобен треугольнику ACD, значит, $\angle ACB$=$\angle ADC$=90° и CD – высота прямоугольного треугольника ACB, проведённая из вершины прямого угла. Тогда CD=AC·BC/AB=12. Треугольник ABC подобен треугольнику CBD с коэффициентом AC/CD =15/12=5/4. Следовательно, их площади относятся как $(5/4)^2$.)**

2. На какую наибольшую степень двойки делится произведение 1007·1008·1009·…·2011·2012? (**<u>На 1006-ю степень</u>, т.к. для любого натурального n произведение $(n+1)\cdot\ldots\cdot 2n=(2n)!/n!=(2n-1)!!\cdot(2n)!!/n!=(2n-1)!!\cdot 2^n$ – нечётное число, умноженное на 2^n; где двойной факториал есть произведение всех натуральных чисел одной (с основанием факториала) чётности, не превосходящих основания факториала.)**

3. На поле e1 шахматной доски стоит шашка. Сколько существует различных маршрутов, по которым она сможет пройти в дамки? *Каждым своим ходом шашка сдвигается на одну клетку вверх по диагонали либо вправо, либо влево.* (**<u>103</u>. Так как шашка ходит по диагонали, то она всё время остается на клетках одного цвета (в данном случае чёрного). Пусть некоторая черная клетка x находится не на первой горизонтали. Если при этом она находится на крайней вертикали, то пойти на эту клетку можно только с одной клетки y, поэтому маршрутов от клетки e1 до клетки x существует столько же, сколько от e1 до клетки y. Если клетка x находится не на крайней вертикали, то пойти на нее можно из двух клеток, причем если к этим клеткам от e1 приводило m и n маршрутов, то к клетке x от e1 ведет m+ n маршрутов. Двигаясь последовательно от второй до восьмой горизонтали, поставим в каждую из клеток, в которые может попасть шашка, число, равное количеству приводящих в неё маршрутов. Таким образом, количество маршрутов, приводящих к клеткам восьмой горизонтали: 20+35+34+14=103.)**

8		20		35		34		14
7	5		15		20		14	
6		5		10		10		4
5	1		4		6		4	
4		1		3		3		1
3			1		2		1	
2				1		1		
1					0			
	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*

4. Дана окружность $(O;\ R)$ и точка K внутри неё. Произвольная окружность, равная данной и проходящая через точку K, имеет с данной окружностью общую хорду. Найдите геометрическое место середин этих хорд (ГМТ). (**<u>Искомым геометрическим местом будет окружность с центром в середине OK и радиусом R/2</u>. Действительно, пусть PQ - общая хорда, M - её середина, а N - центр произвольно выбранной окружности. Поскольку из условия следует, что $OPNQ$ является ромбом, то M будет также серединой ON. Поэтому искомое ГМТ есть образ окружности, образованной центрами, - окружности с центром K и радиуса R, при гомотетии с центром в точке O и коэффициентом 1/2.)**



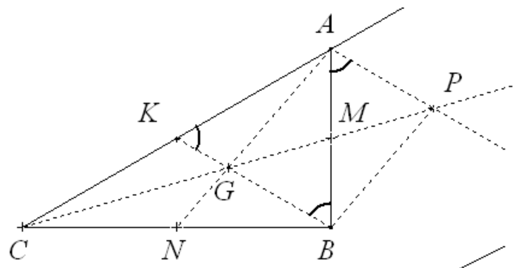
5. Два мудреца играют в следующую игру. Выписаны числа 0, 1, 2,..., 1024. Первый мудрец зачёркивает 512 чисел (по своему выбору), второй зачёркивает 256 из оставшихся, затем снова первый зачёркивает 128 чисел и т.д. На десятом шаге второй мудрец зачёркивает одно число; остаются два числа. После этого второй мудрец платит первому разницу между этими числами. Сколько уплатит второй мудрец первому, если оба будут играть наилучшим образом? (**<u>32</u>. Укажем такую стратегию первого игрока, которая независимо от ходов второго гарантирует, что разность оставшихся двух чисел будет не меньше 32. Эта стратегия описывается очень просто: при каждом ходе вычёркивать числа через одно, то есть вычёркивать второе, четвёртое, шестое, ..., число из оставшихся (мы считаем, что числа расположены в порядке возрастания). Тогда после 1-го хода разность меж-**

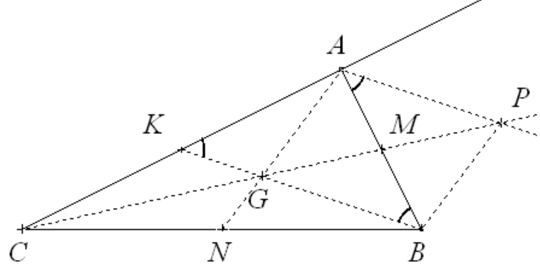
ду любыми соседними из оставшихся чисел будет не меньше 2, после 2-го – не меньше 4, после 3-го – не меньше 8, после 4-го – не меньше 16 и после 5-го – не меньше 32. Теперь укажем стратегию второго игрока, которая независимо от ходов первого позволит ему проиграть не больше 32. Она состоит в следующем. Первым ходом он вычёркивает все числа, меньшие 512, или все числа, большие 512 (ясно, что или тех, или других осталось не больше 256). После этого разность между крайними из оставшихся чисел будет не больше 512. Аналогично вторым ходом он может добиться того, что все оставшиеся числа будут находиться только в одном из отрезков [0, 256]; [256, 512]; [512, 768]; [768, 1024], то есть уменьшить разность между крайними числами по крайней мере до 256. Точно так же 3-м ходом он может уменьшить эту разность до 128, 4-м – до 64 и 5-м – до 32.)

6. Найдите наибольшее натуральное число из различных ненулевых цифр, в котором для любого натурального n, не превышающего количества цифр, сумма первых n цифр будет делиться на n. **(<u>978426</u>. Пусть S_n – сумма первых n цифр, тогда $S_7 \vdots 7$ и в силу оценки $28=1+2+3+4+5+6+7\le S_7\le 3+4+5+6+7+8+9=42$ может принимать одно из трёх значений (28, 35, 42). Если $S_7=28=1+2+3+4+5+6+7$, то $S_6=24$, $S_5=20$, т.е. шестая и седьмая цифры равны 4, что противоречит условию. Если $S_7=35$, то $S_6=30$, $S_5=25$, т.е. шестая и седьмая цифры равны 5, что противоречит условию. Если $S_7=42=3+4+5+6+7+8+9$, то $S_6=36$, $S_5=30$, т.е. шестая и седьмая цифры равны 6, что противоречит условию. Т.о. в числе не более 6 цифр. Наибольшее шестизначное число строится естественным образом подбором на каждом шаге наибольшей цифры, удовлетворяющей условию.))**

7. Рассматриваются все представления числа 100 в виде суммы 10 целых неотрицательных чисел $x_1+x_2+\ldots+x_{10}$ (порядок слагаемых важен). Чему равна сумма всех чисел вида $\dfrac{1}{x_1!\cdot x_2!\cdot\ldots\cdot x_{10}!}$, получаемых из соответствующих разложений числа 100? ($\underline{\dfrac{10^{100}}{100!}}$**. Если каждое слагаемое домножить на 100!, то получится сумма чисел вида $P(x_1, x_2, \ldots, x_{10})$, т.е. количеств перестановок с повторениями, когда первый элемент (например, цифра 1) встречается x_1 раз, второй (цифра 2) – x_2 раза, десятый (цифра 0) – x_{10} раз. В сумме же это будет количество всех 100-значных десятичных кодов, т.е. количество размещений с повторениями из 10 по 100, равное $\overline{A_{10}^{100}}=10^{100}$. Нужный же нам результат будет в 100! раз меньше.)**

8. В прямоугольном ΔABC продолжение медианы CM пересекает биссектрису внешнего угла при вершине A в точке P. Известно, что медиана AN параллельна PB. Найдите стороны треугольника, если AB=1. **(<u>1; 2; $\sqrt{3}$ или 1; 2; $\sqrt{5}$</u>. Проведём через точку пересечения медиан G третью медиану *BK*. Треугольники *AGM* и *BMP* равны, т.к. $\angle BAG=\angle ABP$, $\angle AMG=\angle BMP$ и *AM*=*MB*, а, значит, отрезки *PB* и *AG* равны и параллельны, откуда *APBG* – параллелограмм. Значит, $AP\|GB$ и $\angle BAP=\angle ABK$. Но $\angle ABK+\angle AKB=2\angle BAP$ (т.к. *AP* – биссектриса внешнего угла при *A*), откуда $\angle BAP=\angle ABK=\angle AKB$. Значит, *AC*=2*AK*=2*AB*=2. Итак, в прямоугольном треугольнике одна сторона в два раза больше другой. Имеем 2 случая (в зависимости от того, гипотенуза она или катет): отрезок ВС равен $\sqrt{3}$ или $\sqrt{5}$ соответственно.)**





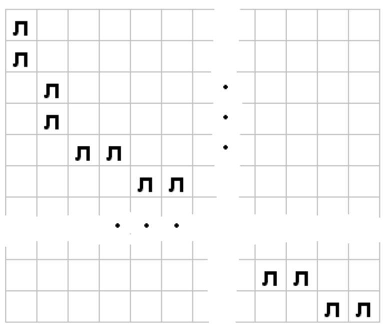
9. Произведение всех натуральных делителей натурального числа N равно N^{100}. Сколько этих делителей у числа N? **(<u>200 или 1</u>. Если у числа *N* чётное количество делителей, то они разбиваются на пары так, что произведение чисел в каждой паре равно *N*. Следовательно, таких пар 100, а всего делителей – 200. Если у *N* нечётное количество делителей, то они аналогично разбиваются на пары все, кроме одного - $\sqrt{N}$. Тогда $\sqrt{N}$ является целой неотрицательной степенью числа *N*, откуда *N*=1, и у него 1 натуральный делитель.)**

10. На кружок пришло 60 учеников. Оказалось, что среди любых 10 учеников есть не меньше трёх одноклассников. Для какого наибольшего k можно гарантированно утверждать, что среди кружковцев найдётся по меньшей мере k учеников, которые учатся в одном классе? (**<u>k=15</u>. Рассмотрим максимальную группу A, в которой нет трёх одноклассников. По условию задачи, в A меньше 10 человек. Рассмотрим все множества одноклассников, в каждом из них рассмотрим то подмножество, которое лежит вне A. Если таких подмножеств (не пустых) не больше трёх, то хотя бы одно из них содержит не меньше 51/3, т. е. не меньше 17 человек. Если таких подмножеств пять или больше, то хотя бы одно из соответствующих им множеств имеет в A меньше двух представителей, и A не является максимальной группой, так как её можно дополнить, не нарушая свойства не содержать трёх одноклассников. Итак, подмножеств – четыре. Хотя бы одно из них содержит не меньше 51/4, т. е. не меньше 13 человек. В A соответствующее множество имеет двух представителей, иначе A можно было бы дополнить. Итак, в этом множестве не меньше 15 человек, что и требуется. В качестве примера, показывающего, что k≤15, можно взять 60 учеников, по 15 в каждом из четырёх классов.**)

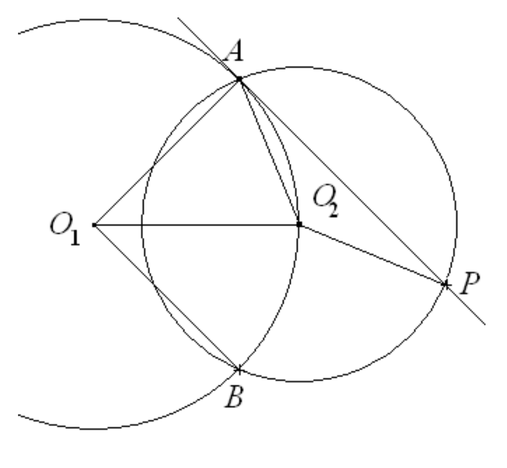
11. Сколько существует различных треугольников с целочисленными сторонами, в которых одна из биссектрис делит противоположную сторону на отрезки длиной 2012 и 2011? (**<u>4021</u>. Пусть биссектриса CK треугольника ABC делит сторону AB на отрезки AK=2012 и KB=2011; BC=a, AC=b. По условию, a/2011=b/2012 ⇔ 2012a=2011b, и, в силу целочисленности сторон, b⋮2012. По неравенству треугольника a+4023=2011b/2012+4023>b и a+b=2011b/2012+b=4023b/2012>4023=AB, откуда 4023·2012>b>2012. Из вышесказанного получаем, что b=2012k, где k – натуральное, 2≤k≤4022, и, соответственно, a=2011k. Несложно проверить, что все такие треугольники подходят, и они различны.**)

12. Решите уравнение $x^3+x^2+x+1/3=0$. ($x=-\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}}$**. Преобразуем данное уравнение к виду $x^3+3x^2+3x+1=-2x^3$. Теперь видно, что в левой части написана формула для куба суммы x+1. Получаем: $(x+1)^3=-2x^3$, откуда $x+1=-\sqrt[3]{2}\,x$, откуда,** $x=-\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}}$**.**)

13. На доске 30×n расставлено несколько ладей таким образом, что каждая ладья бьёт ровно одну ладью. При этом в каждой вертикали и в каждой горизонтали стоит хотя бы одна ладья. При каких n такое возможно? (**<u>15≤n≤60, где n⋮3</u>. Назовём рядом и горизонталь (их 30), и вертикаль (их n). Ладья полностью пробивает два ряда, при этом ладьи делятся на пары бьющих друг друга, тогда каждая пара бьёт ровно три ряда (т.к. один ряд – общий), причём разные пары бьют разные тройки рядов. Следовательно, число рядов кратно трём, т.к. все ряды заняты и должны разбиться на тройки. Кроме того, каждая пара пробивает либо 1, либо 2 из 30 горизонталей. Значит, количество пар ладей будет от 15 до 30, тогда всего должно быть от 15·3=45 до 30·3=90 рядов, т.е. 15≤n≤60. И для каждого из этих случаев есть свой вариант расположения ладей, когда сначала мы ставим k пар ладей вертикально подряд, начиная сверху вниз и справа налево, а затем (30−2k) пар горизонтально, где k=(60−n)/3, см. пример-рисунок, для k=2.**)



14. Первая из двух окружностей проходит через центр второй и пересекает её в точках A и B. Касательная к первой окружности, проходящая через точку A, делит вторую окружность на две дуги в отношении $m:n$ ($m<n$). В каком отношении вторая окружность делит первую на две дуги? (**<u>(n–m):2m</u>. Пусть O_1 и O_2 – центры соответственно первой и второй окружностей, P – точка на второй окружности такая, что AP – касательная к первой окружности. Тогда $\angle AO_2P$ = $360°\cdot\dfrac{m}{n+m}$, $\angle PAO_2 = (180^{o} - \angle AO_2P)/2 = 90°\cdot\dfrac{n-m}{n+m}$.**



Поскольку $\angle PAO_2$ – угол между касательной и хордой, то

$\angle AO_1O_2 = 2\angle PAO_2 = 180° \cdot \dfrac{n-m}{n+m}$, $\angle AO_1B = 2\angle AO_1O_2 = 360° \cdot \dfrac{n-m}{n+m}$. Следовательно, в первой окружности дуга $AO_2B = 360° \cdot \dfrac{n-m}{n+m}$. Тогда дополнительная к ней дуга первой окружности равна $360° \cdot \dfrac{2m}{n+m}$, а искомое отношение равно $\dfrac{n-m}{2m}$.)

15. На плоскости отмечено 100 точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Некоторые пары точек соединены отрезками. Известно, что никакая тройка отрезков не образует треугольника. Какое наибольшее число отрезков могло быть проведено? **(<u>2500</u>. Выберем точку А, из которой исходит наибольшее число отрезков. Обозначим это число отрезков за *n*. Рассмотрим *n* точек, которые соединены с точкой *A*. Ни для какой пары *B*, *C* из этих *n* точек отрезок *BC* не проведен, иначе были бы проведены три отрезка *AB*, *BC*, *CA*, которые образуют треугольник. Таким образом, из каждой точки, соединенной отрезком с точкой *A*, выходит не больше, чем 100–*n* отрезков. Из каждой из 100–*n* точек, не соединенных с точкой *A* (включая саму точку *A*), выходит не более *n* отрезков (по предположению максимальности количества выходящих из *A* отрезков). Таким образом, общее число отрезков, выходящих из всех точек, не превосходит *n*(100-*n*)+(100-*n*)*n* отрезков. Поскольку каждый отрезок выходит из двух точек, всего проведено не более *n*(100-*n*) отрезков. Используя неравенство о средних (*xy* не больше $(x+y)^2/4$ при положительных *x* и *y*), получим, что отрезков не больше, чем $(n+(100-n))^2/4=100^2/4=2500$. Пример с 2500 отрезками строится следующим образом: отмеченные точки делятся на 2 группы по 50 точек и каждая пара точек из разных групп соединяется отрезком. *Примечание: фактически приведено доказательство теоремы Турана в частном случае.*)**

16. Сколько существует десятизначных чисел, у которых каждая последующая цифра не меньше предыдущей? *Ответ дать числом в десятичной записи.* **(<u>$\overline{C_9^{10}} = C_{18}^{10} = 43758$</u>. Решаем либо методом «шаров и перегородок», либо сразу рассматриваем сочетания с повторениями из 9 (ненулевых цифр) по 10, т.к. каждый выбор 10 ненулевых цифр однозначно даёт число с учётом неубывания цифр.)**