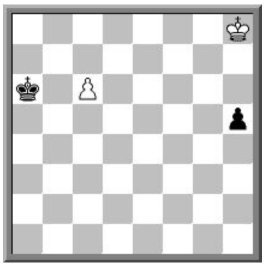
IX Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». VI Турнир математических игр.

Игра «Домино». ***<u>Младшая лига (7-9 класс).</u>*** **<u>Решения</u>. 07.09.2013**



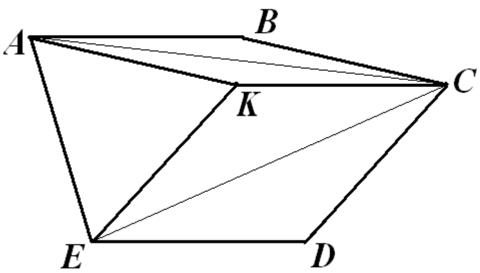
0–0. Дана шахматная позиция (белые – король *h*8, пешка *c*6; чёрные – король *a*6, пешка *h*5), ход белых. Если пешка доходит до края доски, то превращается в ферзя. Позиция считается ничейной, либо если остались только короли, либо если пешки превратились в ферзей друг за другом подряд. Смогут ли белые сделать ничью? (Если да, то укажите первые два хода белых.) (***Этюд Рети (за двумя зайцами).*** **<u>Да, смогут, сходив (1. Кр*g*7 …, 2. Кр*f*6)</u>. После этого они либо догоняют чёрную пешку (если чёрный король идёт к белой пешке), либо успевают защитить королём и провести свою в (если чёрные ходят пешкой). Одно из свойств шахматной доски – кратчайший путь не только по прямой.)**

0–1. Группа школьников ехала на автобусе. Кондуктор продала им билеты (каждому по одному) из одной катушки, идущие подряд (т.е. их шестизначные номера идут последовательно), при этом оказалось ещё, что их билеты имеют одни и те же три первые цифры. Петя обнаружил, что ему и его другу Васе достались “счастливые” билеты. (Билет является “счастливым”, если сумма первых трёх цифр его номера равна сумме последних трёх цифр.) Какое наименьшее число школьников могло быть в группе? **(<u>10 школьников</u>. Легко привести пример, когда школьников 10, например, если проданы билеты с номерами от 100001 до 100010. Покажем, что меньше школьников быть не может. Так как первые три цифры всех проданных билетов одни и те же, то сумма последних трёх цифр у двух проданных билетов совпадает. Тогда по свойству равноостаточности при делении на 9 числа, образованные последними тремя цифрами этих двух билетов, имеют один и тот же остаток от деления на 9, поэтому между ними по крайней мере 8 других чисел, которые есть в других билетах, т.к. номера билетов последовательны. Значит, школьников не меньше 10.)**

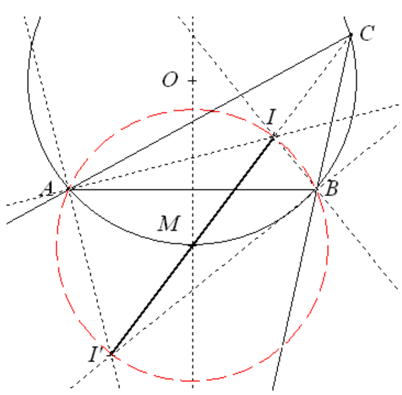
0–2. У скольких трёхзначных чисел произведение цифр равно 6? **(<u>9</u>. Если произведение трёх цифр равно 6, то это либо шестёрка и две единицы, либо тройка, двойка и единица. В первом случае три числа, во втором – 3!=6 чисел.)**

0–3. Каждое из 2013 положительных чисел равно сумме квадратов остальных 2012 чисел. Найдите все эти числа. **(<u>Все числа равны 1/2012</u>. Как наибольшее, так и наименьшее из этих чисел равно сумме квадратов остальных десяти, т.е. самое маленькое (положительное) число набора равно самой большой возможной сумме десяти квадратов, а самое большое (также положительное) число набора равно наименьшей возможной сумме десяти квадратов, значит, наибольшее число равно наименьшему, т.е. все числа равны между собой (пусть это будет число *x*). Тогда получаем уравнение $x=2012x^2$, откуда с учётом положительности $x=1/2012$.)**

0–4. Найдите остаток от деления выражения $1^{2013}+2^{2013}+\ldots+2012^{2013}$ на 2013. (**<u>0</u>. Разобьем слагаемые на пары: $(1^{2013}+2012^{2013})+(2^{2013}+2011^{2013})+\ldots+(1006^{2013}+1007^{2013})$. Заметим, что все слагаемые разбиваются на пары, т. к. слагаемых чётное количество. Разложим каждую пару на множители по формуле: $a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\ldots+b^{n-1})$ для нечётного $n=2013$. У всех пар сумма первой скобки равна 2013, значит, сумма делится на 2013 и имеет остаток 0 от деления на 2013.)**



0–5. Все стороны выпуклого пятиугольника *ABCDE* равны, а $\angle BCD=2\angle ACE$. Найдите $\angle ACE$. **(<u>30°</u>. Отобразим треугольники *ABC* и *CDE* относительно *AC* и *CE*, тогда точки *B* и *D* отобразятся в одну и ту же точку *К*, т.к. сумма углов *ACB* и *ECD* равна углу *ACE*, а отрезки *BC* и *CD* равны. В результате получим равносторонний треугольник *AEК*, а точка *К* окажется центром описанной около треугольника *ACE* окружности, значит, $\angle ACE=\angle AKE/2=60°/2=30°$.)**



0–6. В каком отношении может делиться отрезок, соединяющий центры вписанной и вневписанной окружности, точкой пересечения с описанной окружностью треугольника? **(<u>1:1</u>. Обозначения точек см. на чертеже. Угол *IBI'*=90° в силу того, что *BI* и *BI'* – биссектрисы двух смежных углов. Аналогично, угол *IAI'* также равен 90°. Значит, точки *A*, *B*, *I* и *I'* лежат на**

одной окружности с центром в точке M – середине от резка II'. Пусть $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$, $\angle C=\gamma$.

Тогда $\angle AMB = 2\angle AI'B = 2(\angle AI'I + \angle BI'I) = 2(\angle ABI + \angle BAI) = 2(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta) = \alpha + \beta = 180° - \gamma.$

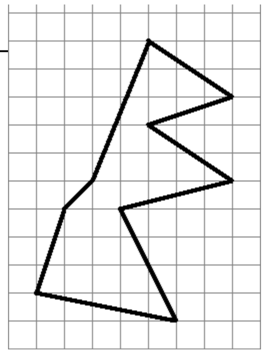
Значит, вокруг четырехугольника $ACBM$ можно описать окружность (т.к. сумма противоположных углов равна 180°). Эта окружность также является описанной окружностью треугольника ABC. Т. о., точка M – середина OO' лежит на описанной окружности, следовательно, описанная окружность делит этот отрезок пополам.)

1–1. Чему равно наибольшее значение выражения, получаемого расстановкой скобок в выражении с 2013-ю единицами 1+1·1+1·1+…+1·1? (**<u>2^{1006}</u>**)

1–2. Клетчатый прямоугольник разрезали на прямоугольники 1×2 (доминошки) так, что любая прямая, идущая по линиям сетки, рассекает кратное четырём число доминошек. Найдите прямоугольник наименьшей площади с таким свойством. **(<u>2×4, сложенный из 4 стоящих в ряд доминошек</u>)**

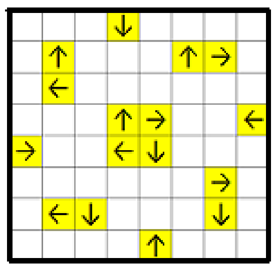
1–3. Найдите количество натуральных делителей числа 2013^{2013}. **(<u>2014^3.</u> Рассмотрим разложение на простые множители $2013^{2013}=3^{2013}\cdot 11^{2013}\cdot 61^{2013}$, тогда по формуле количества натуральных делителей получим $\tau(3^{2013}\cdot 11^{2013}\cdot 61^{2013})=2014\cdot 2014\cdot 2014=2014^3$.)**

1–4. Приведите такой набор из 4 натуральных чисел, что каждое из них не делится на каждое из остальных, а квадрат каждого из них делится на каждое из остальных. Пример обоснуйте. **(<u>Например, $420=2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$, $630=2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$, $1050=2\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7$, $1470=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7^2$</u>. При этом квадрат каждого из них делится на остальные, так как в разложении каждого из этих чисел на простые множители каждый из множителей встречается в степени не больше 2, а в разложении каждого из квадратов этих чисел – в степени не меньше 2.)**



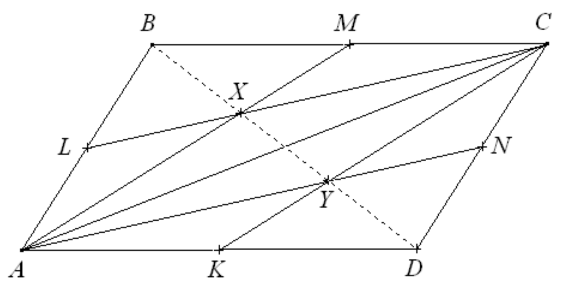
1–5. Найдите площадь фигуры, изображенной на клетчатой решётке со стороной клетки, равной 1. **(<u>28.</u> По формуле Пика площадь многоугольника с вершинами в узлах целочисленной решётки равна S=В+Г/2-1, где В – кол-во целочисленных точек внутри фигуры, Г – кол-во целочисленных точек на границе фигуры. S=24+10/2-1=28.)**

1–6. Новая шахматная фигура *тритон* бьёт три клетки – одну перед собой в заданном направлении и соседние с этой клеткой справа и слева относительно указанного направления, т.е. фактически бьёт прямоугольник 1×3, перпендикулярный направлению. Расставьте на шахматной доске такое наименьшее число *тритонов*, чтобы ни один не бил другого, а все свободные клетки были побиты (в примере указать также и то, куда направлены фигуры). **(<u>Пример на 16 тритонов – см. рисунок (расстановка методом «пропеллера»</u>. (Можно также разбить доску на четыре зоны 4×4, в центральном квадрате 2×2 каждой из которых поставить 4 тритонов методом «пропеллера».) Каждый тритон занимает и бьёт в сумме не более 4 клеток, значит, тритонов не менее 64:4=16. Фактически это задача о разбиении доски 8×8 на тетрамино в виде буквы «Т».)**



2–2. Решите уравнение $x^2-5y+3=0$ в целых числах. **(<u>Решений нет.</u> Рассмотрим остатки от деления x^2 на 5. $x\equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow x^2\equiv 1 \pmod 5$; $x\equiv 2 \pmod 5 \Rightarrow x^2\equiv 4 \pmod 5$; $x\equiv 3 \pmod 5 \Rightarrow x^2\equiv 4 \pmod 5$; $x\equiv 4 \pmod 5 \Rightarrow x^2\equiv 1 \pmod 5$; $x\equiv 0 \pmod 5 \Rightarrow x^2\equiv 0 \pmod 5$. Следовательно, квадрат числа не может давать остаток $2\equiv -3$ от деления на 5, т. е. выражение $x^2-5y\neq -3$.)**

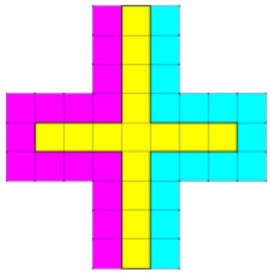
2–3. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Найдите угол между прямыми BC и AD, если $S_{AOB}=S_{COD}$. **(<u>0°, они не пересекаются.</u> Если $S_{AOB}=S_{COD}$, то $OB\cdot OA=OC\cdot OD$, значит, треугольники BOC и AOD подобны и $BC\|AD$.)**



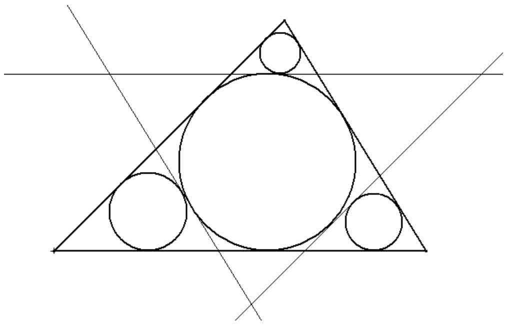
2–4. В параллелограмме отрезки, соединяющие вершину одного из его углов с серединами несмежных с ним сторон, делят этот угол на три равные части. Какие значения может принимать этот угол? **(<u>Никакие. Условие задачи некорректно: данные отрезки НЕ МОГУТ делить угол на 3 равные части</u>. Предположим, что это возможно. Пусть L, M, N, K – соответственно середины сторон AB, BC, CD и AD параллелограмма $ABCD$. Пусть X и Y – точки пересечения медиан в треугольниках ABC и ACD. Тогда $BX=XY=YD$. Пусть отрезки AM и AN**

делят угол A на 3 равные части. Тогда AX – медиана и биссектриса треугольника ABY, т. е. $AX \perp BD$, AY – медиана и биссектриса треугольника ADX, т. е. $AY \perp BD$. Тогда из точки A опущено два различных перпендикуляра на прямую BC. Противоречие.)

2–5. Разрежьте крест, составленный из пяти одинаковых квадратов 3×3, на три клетчатых многоугольника, равных по площади и периметру. **(см. рис.)**



2–6. В треугольник вписана окружность радиуса R. Проведенные к ней касательные, параллельные сторонам треугольника, отсекают от него три треугольника. Радиусы окружностей, в них вписанных, равны 1, 2 и 3. Какие значения может принимать R? (**<u>6</u>. Заметим, что в силу равенства отрезков касательных, проведенных из одной точки, сумма периметров маленьких треугольников равна периметру большого. Т.к. все четыре треугольника подобны, то и сумма радиусов маленьких треугольников равна радиусу большого.)**



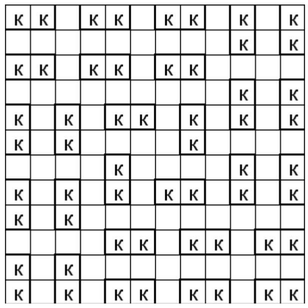
3–3. В углах квадрата со стороной 1 сидят волки, а в его центре – заяц. Волки могут бегать только по сторонам квадрата, в то время как заяц где угодно. С какой наименьшей скоростью должны бегать волки, чтобы заяц не смог выбраться из квадрата, если его скорость равна 1? ($\sqrt{2}$ **. Ясно, что если скорость волков в $\sqrt{2}$ раз больше скорости зайца, то они смогут не выпустить его из квадрата (например, всегда находясь на противоположных концах перпендикуляров к сторонам квадрата, проходящих через зайца). Если же их скорость меньше, то у зайца есть стратегия. Так как скорости волков меньше $\sqrt{2}$ скорости зайца, то за время, пока заяц добежит до угла квадрата, волки из смежных углов не смогут до него добежать. Тогда, если ему повернуть на 90º в момент незадолго до прибытия в этот угол к той стороне, на которой только 1 волк, он сумеет убежать (если волк в углу, то к любой стороне).)**

3–4. Какое наибольшее количество различных чисел, меньших миллиона, можно расставить по кругу так, чтобы последняя цифра одного являлась первой цифрой следующего? (**<u>900000</u>. Очевидно, что среди этих чисел не должно быть чисел, оканчивающихся 0 (в силу того, что нет начинающихся с него). Тогда выбранных нами чисел не более 900000. Докажем, что все их можно расставить требуемым образом. Рассмотрим полный граф K_9 с одной петлёй в каждой вершине. У каждой его вершины степень 10. Занумеруем вершины цифрами от 1 до 9. Тогда, при некотором N, числу $\overline{aNb}$ соответствует ребро из a в b. Так как степени всех вершин в графе чётны, то в этом связном графе существует эйлеров цикл. Пройдя по этому циклу 2 раза туда и обратно (для чисел $\overline{aNb}$ и $\overline{bNa}$), мы получим все числа при данном N, в том числе и те, которые и начинаются, и заканчиваются одной и той же цифрой (им соответствует петля). Таким образом, пройдя этот цикл для каждого возможного значения N (от 0000 до 9999) и записав полученные нами числа по кругу, мы получим требуемую расстановку.)**

3–5. Из комплекта домино взяли все 15 костей, содержащих цифры от 1 до 5, и разбили на 3 подмножества по 5 костей так, что в каждом подмножестве кости можно выложить по правилам домино в замкнутую цепочку. Сколькими способами можно произвести такое разбиение на три подмножества? (Порядок самих подмножеств в разбиении несущественен.) (**<u>60 разбиений</u>. Легко убедиться, что в одно и то же подмножество не может попасть три «дубля» (т.е. кости с одинаковыми цифрами). Значит, одно подмножество должно содержать один дубль, два других – по 2 дубля. Одинокий дубль можно выбрать пятью способами, к нему в цепи с обоих концов может примыкать 4·3/2=6 разных пар. Т.е. цепи с одним дублем возможно построить 5·6 разных троек вида (ba)(aa)(ac), где a, b, c – различные цифры от 1 до 5. Тогда каждую такую тройку можно достроить до замкнутой цепи из пяти пар двумя способами (cd)(de) и (ce)(ed), где d и e - две оставшиеся цифры. Значит, подмножество с одним дублем выбирается 5·6·2=60 способами. Далее нетрудно доказать, что при каждом таком выборе два других подмножества разбиения определяются однозначно.)**

3–6. Найдите все натуральные числа, удовлетворяющие условиям $x^2 \equiv x \pmod{10000}$ и $x<10000$? (**<u>1, 625, 9376</u>. Данное сравнение равносильно выполнению двух условий $x(x-1) \equiv 0 \pmod{2^4}$ и $x(x-1) \equiv 0 \pmod{5^4}$. Отсюда $x \equiv 0, 1 \pmod{2^4}$ и $x \equiv 0, 1 \pmod{5^4}$. Тогда по модулю 10^4 исходному сравнению будут удовлетворять 4 числа, из которых два – это числа 0 и 1. Два других числа – 625 и 9376,**

которые можно найти перебором чисел, кратных 625, проверяя их остаток при делении на 16.)

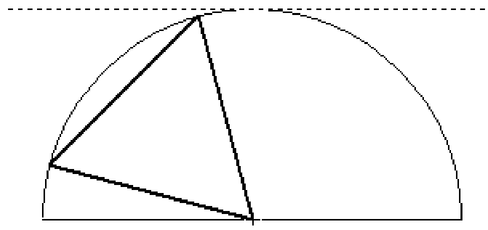


4–4. Какое наибольшее количество королей можно расставить на доске 12×12 так, чтобы каждый король бил ровно одного из остальных? **(<u>56 королей – см. пример методом «пропеллера»</u>. Рассмотрим положения королей, бьющих друг друга. Они могут бить, соприкасаясь по стороне или по углу. На доске 13·13=169 узлов. На соприкасающихся углом королей требуется 7 узлов, а на соприкосновение стороной – 6 узлов. При этом каждая пара королей не может иметь общих узлов с другими парами, так как тогда хотя бы один король бил бы уже двух королей, т. е. не выполнялось бы условие: «каждый король бьёт ровно одного из остальных». Тогда на доску можно поставить не более [169/6]=28 пар королей. Расположение королей см. рис.)**

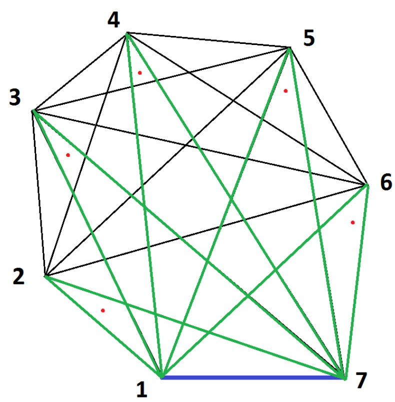
4–5. На какое наименьшее натуральное число надо умножить 999999999 (девять девяток), чтобы получить репьюнит, т.е. число, состоящее из одних единиц? **(<u>111111111222222222333333333444444444555555555666666666777777777888888889 (цифр от 1 до 7 по девять, цифра 8 встречается 8 раз и одна 9-ка на конце</u>). Заметим, что нужный нам репьюнит E_n должен делиться на E_9=111111111 – девятая часть числа из девяти девяток. Тогда количество единиц нужного нам репьюнита должно быть кратно 9, что очевидным образом доказывается, т.е. $n=9k$, где k – натуральное число. При этом после деления на E_9 получится число вида 100000000100…01, состоящее из k единиц и блоков по 8 нулей между ними. Но нам нужна дополнительная делимость на 9, значит, k⋮9 в силу признака делимости на 9. Следовательно, наименьший нужный нам репьюнит содержит 81 единицу. После деления на E_9 и 9 получим нужный нам множитель.)**

4–6. Приведите пример такого квадратного трехчлена $P(x)$, что для любого репьюнита, т.е. натурального числа n, состоящего из одних единиц, число $P(n)$ также окажется репьюнитом. *Пример обосновать.* **(Рассмотрим $P(x)=9x^2+2x=x(9x+2)$. Пусть $n=E_k=\underbrace{11\ldots1}_{k\ \text{единиц}}$. Тогда $P(n)=E_k\cdot(10^k+1)=E_{2k}$.)**

5–5. Разместите внутри полосы шириной 1 фигуру, в которую некоторым параллельным переносом может быть помещён любой правильный треугольник со стороной 1 так, чтобы его вершины принадлежали границе этой фигуры. **(Любой треугольник можно перенести так, чтобы он целиком оказался по одну сторону от диаметра полуокружности радиуса 1, а одна из его вершин оказалась в середине диаметра полуокружности.)**



5–6. Какое наименьшее количество точек можно поставить внутри выпуклого 2013-угольника так, чтобы для любого треугольника с вершинами в вершинах этого 2013-угольника нашлась точка, находящаяся **строго** внутри треугольника? **(<u>2011 точек</u>. Рассмотрим рассуждение в общем виде (для n-угольника). Необходимо не менее $n-2$ точек, т. к. диагонали одной вершины разбивают n-угольник на $n-2$ непересекающихся треугольника. Расположим $n-2$ точек следующим образом (на примере 7-угольника). Выберем любою сторону (1-7, синяя). Для каждой из остальных вершин рассмотрим угол, опирающийся на эту сторону (зеленый). Поставим точку в треугольнике, отсекаемом от этого угла отрезком между соседними вершинами. Тогда для любых трёх вершин $a<b<c$ в треугольнике abc будет точка при вершине b: так как, если вместо a взять 1, то количество точек, согласно нашей расстановке, не увеличится. Аналогично, можно вместо c взять n (в данном случае 7). Но по нашей расстановке внутри любого треугольника 1$x$$n$ есть точка.)**



6–6. a, b, c, d, e – натуральные числа с суммой 1000, которые стоят по кругу. Известно, что если любые два несоседних из них взять со знаком «–», а остальные три со знаком «+», то такая сумма всегда будет положительной. Найдите наибольшее возможное значение выражения $(a+c)^{b+d}$. **(<u>499^{499}</u>. Введём для 5 знакопеременных сумм, рассматриваемых в условии, обозначения S_1, S_2, S_3, S_4 и S_5. При этом получим, что $S_1+S_2+S_3+S_4+S_5=a+b+c+d+e=1000$, $2a=S_1+S_2$, $2b=S_2+S_3$, $2c=S_3+S_4$, $2d=S_4+S_5$, $2e=S_5+S_1$, откуда следует, что все S-ки одной чётности и при этом будут чётные, т.к. сумма этих 5 чисел одной чётности равна чётному числу 1000. Тогда имеем, $a+c=(S_1+S_2+S_3+S_4)/2=(1000-S_5)/2$, аналогично $b+d=(1000-S_1)/2$. Тогда нужная нам степень $(a+c)^{b+d}$ будет максимальной, когда S_1 и S_5 минимальны, т.е. равны 2 в силу чётности. Значит, max $(a+c)$=max $((1000-S_5)/2)=499$, аналогично max $(b+d)$=max $((1000-S_1)/2)=499$. И такое действительно могло быть, например, при $a=2$, $b=497$, $c=497$, $d=2$, $e=2$.)**