IX Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». VI Турнир математических игр.

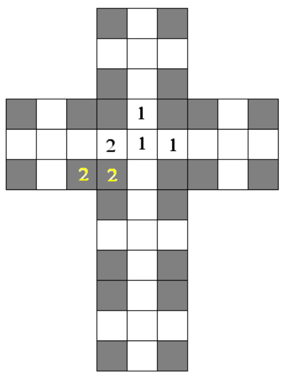
Математическая игра «Дуэль».

<u>Младшая лига.</u> **<u>Решения</u>.** ***08 сентября 2013 года***

1. В двух группах учится одинаковое количество студентов. Каждый студент изучает по крайней мере один язык: английский или французский. Известно, что 5 человек в первой группе и 5 во второй изучают оба языка. Количество изучающих французский в первой группе в 3 раза меньше, чем во второй. Количество изучающих английский во второй группе в 4 раза меньше, чем в первой. Каково минимально возможное количество студентов в одной группе? **(<u>28 студентов</u>. Пусть изучающих французский в первой группе x человек, тогда во второй их $3x$. Пусть изучающих английский во второй группе y человек, тогда в первой их $4y$. Всего в первой группе $x+4y-5$ человек, а во второй $3x+y-5$ человек. Приравнивая эти значения, получаем, что $3y=2x$, откуда следует, что y – чётное число. Заметим также, что $y\geq5$, т.к. если два языка учат 5 человек, то уж английский язык как минимум пять человек изучает. Отсюда получается, что минимальное значение $y=6$, тогда $x=9$, а всего в одной группе учатся $x+4y-5=9+24-5=28$ студентов.)**

2. Двое играют в следующую игру. За один ход из написанного на доске натурального числа k можно вычесть любой его делитель и записать вместо k полученную разность. Проигрывает игрок, получивший 1 или 0. Укажите все начальные значения $k > 1$, при которых второй игрок может выиграть независимо от того, как играет первый. **(<u>2 и все нечётные числа, начиная с 5</u>. Назовём число выигрышным, если игрок, делающий ход, когда на доске возникнет это число, может выиграть независимо от действий противника; в противном случае назовём число проигрышным. Исследуем числа в порядке возрастания. Число 2 – выигрышное: 2 – 2 = 0 и 2 – 1 = 1. Число 3 – проигрышное: 3 – 1 = 2, и ходящий с двойки наш противник проиграет. Число 4 тоже проигрышное: 4 – 2 = 2. Число 5 – выигрышное: 5 – 1 = 4, 5 – 5 = 0. Покажем, что далее каждое чётное число проигрышно, а каждое нечётное выигрышно. Из чётного числа можно вычесть 1 и получить выигрышное. Из нечётного вычитанием делителя можно получить только чётное число: 0 – это проигрыш сразу, а 2 получить можно только из 4. Все остальные чётные числа проигрышны.)**

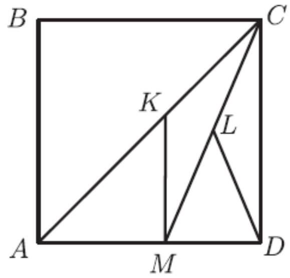
3. Поверхность куба $3\times3\times3$ оклеили семнадцатью бумажными полосками 3×1 и одним уголком так, что каждая полоска и уголок закрыли по 3 целые клетки (возможно, с перегибанием через ребро). Сколько существует возможных расположений уголка? (*Куб считается жёстко закреплённым*.) **(<u>72</u>. Раскрасим клетки куба в два цвета так, чтобы все клетки около вершин куба были чёрными, остальные клетки – белыми (см. рис.). При такой раскраске каждая полоска 1×3 содержит чётное (0 или 2) количество чёрных клеток. Всего на кубе $8\cdot3=24$ чёрных клетки – чётное количество,**



значит, и трёхклеточный уголок должен содержать чётное количество чёрных клеток, а таких расположений (из 6 возможных с точностью до поворота и симметрии) ровно 2 – они пронумерованы на рисунке. Для каждого из них существует свой пример оклейки. Вариантов 1 типа будет

6·4=24 (6 центров граней для положения средней клетки уголка, 4 положения оставшихся двух клеток уголка). Вариантов 2 типа будет 6·4·2=48 (6 граней, по 4 угловых клетки для положения средней клетки уголка, 2 положения второй чёрной клетки уголка, однозначное положение белой клетки уголка). Всего 24+48=72 возможных положения уголка.)

4. Найдите все целые n, для которых число $\sqrt{11+6\sqrt{n}}+\sqrt{11-6\sqrt{n}}$ является натуральным. (**<u>n=2</u>, что находится возведением в квадрат и дальнейшим извлечением корня)**

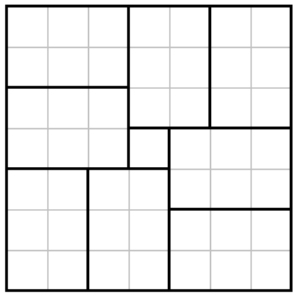


5. Покажите, как любой квадрат можно разрезать на не более чем 5 попарно различных равнобедренных треугольников. **(Способ разрезания приведён на рисунке. Здесь точка K выбрана на диагонали AC так, чтобы $KM=CK$ ($KM \perp AD$), точка L – середина MC.)**

6. Рассматриваются квадратичные функции $y=x^2+px+q$, для которых $p+q$=2013. Найдите точку, в которой пересекаются все графики таких функций. **(<u>(1;2014)</u>, т.к. это точка при x=1, когда $y(1)=1^2+p\cdot1+q=1+p+q=1+2013=2014$)**

7. На клетчатую доску 7×7 неизвестным образом ставят корабль 2×2. Какое наименьшее количество детекторов можно расположить заранее на доске так, чтобы можно было абсолютно точно определить расположение корабля? Приведите ответ и пример. (*Детектор в клетке показывает, занята клетка кораблём или нет, и ставится до появления корабля.*) **(<u>16 детекторов – см. рис.</u> Докажем оценку на 16 детекторов. Выделим на доске 8 прямоугольников 2×3 методом «пропеллера». Заметим, что в прямоугольнике 2×3 должно быть не менее двух детекторов с возможным исключением в одном прямоугольнике, где может оказаться ровно 1 детектор (причём в углу) и свободный квадрат 2×2. Но если рассмотреть два рядом стоящих прямоугольника 2×3, образующих прямоугольник 4×3, тогда в каждом из них должно оказаться хотя бы по два детектора (доказывается перебором случаев). Значит, в каждой из четырёх зон 4×3 стоит хотя бы по 4 детектора, а во всём квадрате 7×7 детекторов будет не менее 4·4=16.)**

	д	д		д	д	
	д	д		д	д	
	д	д		д	д	
	д	д		д	д	



8. Василий Васильевич, вспомнил, как в студенческие времена взяв менее 100 рублей, пошёл гулять. Заходя в какой-нибудь магазин и имея при этом m рублей n копеек, он тратил n рублей m копеек. Какое наибольшее число магазинов смог посетить студент Вася? (**<u>6 магазинов</u>. Пусть при входе в первый магазин Вася имел a рублей b копеек. Ясно, что $b \le a$. Тогда при выходе он будет иметь $a-b-1$ рублей и $b-a+100$ копеек. Пусть $a-b = t \le 99$. Итак, у Васи сейчас $t - 1$ рубль $100 - t$ копеек. Условие возможности посещения второго магазина: $t - 1 \ge 100 - t$, или $t > 51$, т.к. t – целое. После посещения второго магазина у Васи $2t - 102$ рублей и $201 - 2t$ копеек, чтобы можно было посетить третий, необходимо и достаточно, чтобы $t \ge 76$. Аналогично, чтобы посетить четвёртый магазин, необходимо и достаточно, чтобы $t \ge 89$, чтобы пятый – t**

≥ 95, чтобы шестой – $t \geq 98$, а чтобы седьмой – t должно быть больше, чем 99. Последнее невозможно, а предыдущее неравенство выполнимо, например, если Вася имел изначально 99 рублей 00 копеек. Проследим за состоянием кошелька в этом случае. После первого магазина остаётся 98 руб 01 коп, после второго – 96 руб 03 коп, после третьего – 92 руб 07 коп, после четвёртого – 84 руб 15 коп, после пятого – 68 руб 31 коп, после шестого – 36 руб 63 коп, в седьмом магазине расплатиться уже не удастся.)

9. Назовём *весёлым* 9-значное число из различных ненулевых цифр, которое вместе со своим числом-«перевёртышем» (т.е. записанным цифрами в обратном порядке) будет давать минимально возможную сумму среди аналогичных пар чисел. Сколько всего весёлых чисел? **(<u>16 весёлых чисел</u>. Сумма самого числа $\overline{a_9a_8\ldots a_1}$ и его перевёртыша равна $100000001(a_9+a_1)+10000001(a_8+a_2)+1000001(a_7+a_3)+100001(a_6+a_4)+10000a_5$. Тогда по транснеравенству минимально возможная сумма попарных произведений с ненулевыми цифрами будет в случае $a_9 \leq a_1 \leq a_8 \leq a_2 \leq a_7 \leq a_3 \leq a_6 \leq a_4 \leq a_5$. Следовательно, с учётом равенства коэффициентов получим, что $\{a_9, a_1\}=\{1, 2\}$, $\{a_8, a_2\}=\{3, 4\}$, $\{a_7, a_3\}=\{5, 6\}$, $\{a_6, a_4\}=\{7, 8\}$, $a_5=9$. Значит, всего будет $2^4=16$ чисел, т.к. в каждой из четырёх пар цифр будет по 2 варианта выбора значений для них.)**

10. Приведите пример четырёхугольника с вершинами в узлах целочисленной решётки, квадраты длин сторон которого являются четырьмя последовательными натуральными числами. **(Такой четырёхугольник не существует. Квадрат длины отрезка с вершинами в узлах сетки равен сумме двух квадратов целых чисел. Значит, он не может давать остаток 3 при делении на 4. А число с таким остатком найдётся среди четырёх последовательных чисел.)**

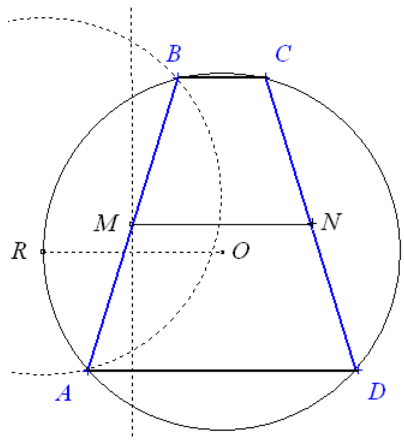
11. В клетки квадрата 3×3 записываются попарно различные натуральные числа так, чтобы все 6 произведений (по строкам и столбцам) были равны между собой. Какое наименьшее значение может принимать максимальное из этих девяти чисел? Приведите ответ и пример. **(<u>15, см. пример таблицы</u>. Предположим, что наибольшее число будет меньше 15. Тогда в таблице нет чисел 5, 10 и 7, 14, т.к. иначе нам не удастся сделать все три произведения по столбцам кратными 5 и 7 соответственно. Кроме того, по такой же причине в таблице нет простых чисел 11 и 13. Значит, мы использовали только числа из множества {1,2,3,4,6,8,9,12}, которых всего 8, а нам надо 9 чисел. Следовательно, наибольшее число не меньше 15.)**

5	12	2
3	10	4
8	1	15

12. Электронные часы показывают два числа: часы и минуты в режиме 24 часов. В некоторый момент оказалось, что разность между большим и меньшим из этих чисел равна 30. Какой может быть разность между большим и меньшим из этих чисел через 30 минут? **(<u>Либо 1, либо 23</u>. Число часов не может быть больше 23, поэтому большим является число минут и оно больше 30. Значит, за 30 минут до того, как взглянули на часы, был тот же час, а число часов равнялось числу минут, и их разность равнялась нулю. Через 30 минут после того, как он взглянул на часы, час будет следующий, а число минут будет таким же, как и час назад. Таким образом, разность будет равна разности между двумя числами, показывающими количество часов в двух соседних часах, то есть 1 или 23 (когда часы в разных сутках).)**

13. Из цифр 1, 2, 3, 4 , 5, 6, 7 оставьте наибольшее количество цифр, чтобы можно было составить три натуральных числа, в каждом из которых оставленные цифры использовались бы ровно по одному разу, и чтобы сумма двух чисел равнялась третьему. Приведите один из возможных примеров такой тройки чисел. **(<u>Оставить надо 5 цифр, например, 12537+23175=35712</u>. Заметим, что если при сложении двух чисел происходит переход разряда, то сумма цифр слагаемых уменьшается на 9 в записи их суммы, значит, остаток суммы цифр при делении на 9 должен сохраниться. Это возможно только тогда, когда сумма оставленных цифр будет кратна 9. Перебором показывается, что из 6 цифр с суммой 27 нельзя составить нужную тройку чисел. А с пятью цифрами такое возможно.)**

14. Какие значения может принимать угол при основании вписанной в окружность трапеции, средняя линия которой равна радиусу этой окружности? **(<u>30°<α<150° и α не равен 45°, 90° и 135°</u>. Будем строить нашу равнобедренную трапецию методом «идеального» построения (см. чертёж). Тогда точка *M* – середина боковой стороны *AB* трапеции *ABCD* – будет двигаться по прямой, являющейся серединным перпендикуляром к некоторому радиусу *OR*, параллельному стороне *AD*. Двигая точку М по этому серединному перпендикуляру в пределах окружности получим, что по непрерывности ∠*BAD*=α будет меняться в пределах от 30° (точка *A* совпадёт с *B* и прямая *AB* будет стремиться к касательной) до 150° (аналогичная ситуация на другом конце рассматриваемого отрезка). Но возникнут также особые случаи: 1) α=45°, когда точка *A* совпадёт с *R*, *B*=*C*, получится равнобедренный треугольник; 2) α=135°, когда точка *B* совпадёт с *R*, *A*=*D*, также получится равнобедренный треугольник; 3) при попадании *M* на *OR* возникнет случай прямоугольника (α=90°), который по определению не является трапецией.)**



15. Каково наибольшее количество подряд идущих натуральных чисел, каждое из которых делится на произведение своих ненулевых цифр? Приведите ответ и пример с обоснованием. **(<u>13 чисел, от $\underbrace{11\ldots11}_{18\ \text{единиц}}000$ до $\underbrace{11\ldots11}_{18\ \text{единиц}}012$, все эти числа подходят, т.к. число $\underbrace{11\ldots11}_{18\ \text{единиц}}000$ делится на любую ненулевую цифру и прибавление её на конце делимость сохранит</u>. Больше 13 чисел быть не может, т.к. в этом ряду не могут быть два числа, отличающихся ровно на 10 и оканчивающихся на 3, на 6 и на 9 – одно из чисел каждой такой пары не делится на 3. Перебор вариантов даёт самый длинный ряд в 13 чисел от числа, оканчивающегося на 0, до числа в следующем десятке, оканчивающегося на 2.)**

16. На бесконечном листе клетчатой бумаги отметили 60 отрезков, соединяющих соседние узлы сетки. На какое наибольшее число частей они могли разбить лист? **(<u>На 26 частей</u>. Одна из частей имеет бесконечную площадь (будем называть её *внешней*). Рассмотрим фигуру, образованную внутренними частями. Если её площадь не больше 25, то частей не больше 25. Если же её площадь больше 25, то периметр больше 20 (как известно, при данной площади наименьший периметр имеет квадрат). Построим из спичек отдельно копию**

каждой внутренней части. На это уйдет менее $(60–20)\cdot 2+20=100$ спичек (спички, находящиеся на периметре, “дублировать” не нужно). Так как каждая часть ограничена не менее, чем четырьмя спичками, то внутренних частей меньше 25. Пример, когда частей ровно 26: квадрат 5×5, разделенный спичками на единичные квадратики.)