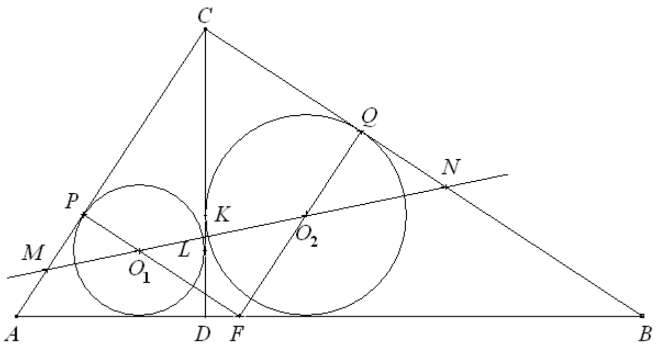
IX Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». VI Турнир математических игр.
Математическая игра «Дуэль».

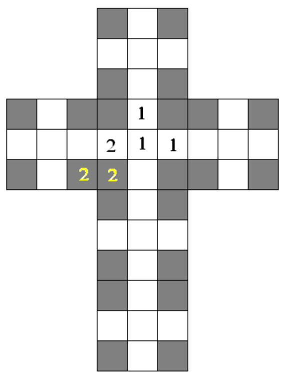
Старшая лига.* Решения. *08 сентября 2013 года

1. Высота, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу, делит треугольник на два треугольника, в каждый из которых вписана окружность. Какие значения может принимать площадь треугольника, образованного катетами исходного треугольника и прямой, проходящей через центры этих окружностей, если высота исходного треугольника равна h? (**$h^2/2$. Пусть ABC – данный треугольник, $\angle C = 90°$, CD – его высота, O_1 и O_2 – центры окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, r_1 и r_2 – их радиусы, P и Q – точки касания со сторонами AC и BC, L и K – со стороной DC, M и N – точки пересечения прямой O_1O_2 со сторонами AC и BC, F – точка пересечения прямых PO_1 и QO_2. Тогда $PCQF$ – прямоугольник, $PF=CQ$, $QF=CP$. Поэтому $FO_1=PF-r_1=CQ-r_1=CK-r_1$, $FO_2=FQ-r_2=CP-r_2=CL-r_2$. Поскольку $CK+r_2=CL+r_1=CD$, то $CK-r_1=CL-r_2$. Поэтому $\angle FO_1O_2=45°$. Следовательно, $\angle CNM=45°$, $CN=CQ+r_2=CK+r_2=CD=h$.**)



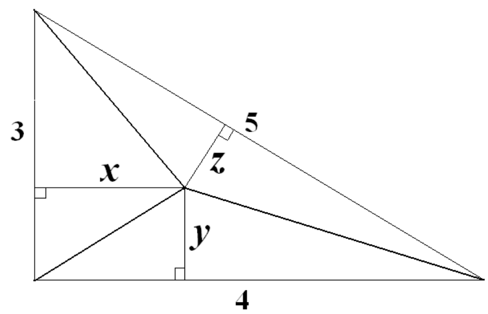
2. Найдите наибольшее натуральное k, удовлетворяющее следующему условию: если в n мешках разложены гири, вес каждой гири – степень двойки и суммарный вес гирь в каждом мешке один и тот же, то найдутся k гирь одного веса. (**$k=[n/2]+1$. Допустим, что $k \le n/2$. Тогда есть такой набор гирь, в котором каждая гиря встречается не более k раз. Пусть самая тяжелая гиря в нем весит 2^m. Общий вес всех этих гирь не превосходит $k(2^m+2^{m-1}+\ldots+1)$, что меньше, чем $n2^m$. Но это невозможно, потому что суммарный вес гирь в каждом из n мешков не может быть меньше веса самой тяжелой гири. Итак, $k > n/2 \Rightarrow k \ge [n/2]+1$. Осталось для каждого n построить пример, когда $k = [n/2]+1$. Поскольку $[(2l+1)/2] = [2l/2]$, достаточно построить пример для $k = 2l+1 \ge 3$. Возьмем по $l+1$ гире каждого из весов $1, 2, \ldots, 2^{l+1}$ соответственно. Их суммарный вес равен $(l+1)(2^{l+2}-1) = 2^{l+1}(2l+1)+(2^{l+1}-l-1)$. Разложим число $2^{l+1}-l-1$ в сумму различных степеней двойки и уберем из нашего набора по гире соответствующего веса. Общий вес оставшихся гирь равен $2^{l+1}(2l+1)$. Соберем все гири веса 1 в кучки по две. Гирь веса 1 после этого не останется, иначе число $2^{l+1}(2l+1)$ было бы нечетным. Полученные кучки веса 2 будем числить наравне с гирями веса 2. Теперь соберем все гири веса 2 в кучки по две. Гирь веса 2 после этого не останется, иначе число $2^{l+1}(2l+1)$ не делилось бы на 4. Этот процесс можно продолжать, пока не получится $2l+1$ гирь и кучек, весом 2^{l+1} каждая, что и завершает доказательство.**)

3. Поверхность куба 3×3×3 оклеили семнадцатью бумажными полосками 3×1 и одним уголком так, что каждая полоска и уголок закрыли по 3 целые клетки (возможно, с перегибанием через ребро). Сколько существует возможных расположений уголка? (*Куб считается жёстко закреплённым.*) (**72. Раскрасим клетки куба в два цвета так, чтобы все клетки около вершин куба были чёрными, остальные клетки – белыми (см. рис.). При такой раскраске каждая полоска 1×3 содержит чётное (0 или 2) количество чёрных клеток. Всего на кубе 8·3=24 чёрных клетки – чётное количество, значит, и трёхклеточный уголок должен содержать чётное количество чёрных клеток, а таких расположений (из 6 возможных с точностью до поворота и симметрии) ровно 2 – они пронумерованы на рисунке. Для каждого из них существует свой пример оклейки. Вариантов 1 типа будет 6·4=24 (6 центров граней для положения средней клетки уголка, 4 положения оставшихся двух клеток уголка). Вариантов 2 типа будет 6·4·2=48 (6 граней, по 4 угловых клетки для положения средней клетки уголка, 2 положения второй чёрной клетки уголка, однозначное положение белой клетки уголка). Всего 24+48=72 возможных положения уголка.**)

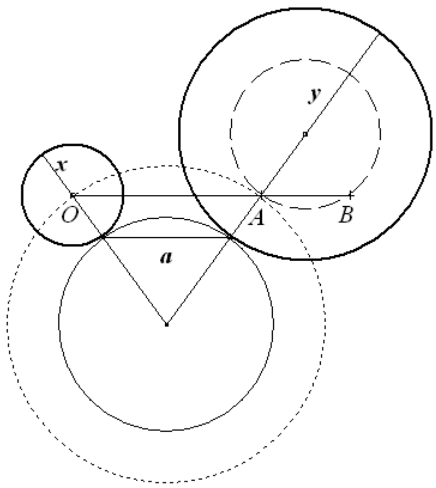


4. Найдите все многочлены $P(x)$ с действительными коэффициентами, обладающие следующим свойством: если $a^2–b^2$ рационально, то число $P(a)–P(b)$ тоже рационально. (**$P(x)=ax^2+b$, где a – любое рациональное, b – любое действительное число**. **Положим $a = –b$. Получим, что значение многочлена $F(b) = P(–b)–P(b)$ рационально при любом b. Так как непостоянный многочлен принимает и иррациональные значения, получаем, что $F(b) = \text{const} = F(0) = 0$. Таким образом, $P(b) = P(–b)$, следовательно для некоторого многочлена $Q(x)$ имеем $P(x) = Q(x^2)$. Полагая $a = \sqrt{b^2+1}$, получаем, что $Q(b^2+1)–Q(b^2)$ рационально при любом b. Отсюда аналогично предыдущему заключаем, что $Q(x+1)–Q(x) = \text{const}$, что возможно только если $Q(x)$ имеет степень 1. Итак, $P(x) = ax^2+b$. Легко видеть, что b может быть любым, а a – обязательно рациональным.)**

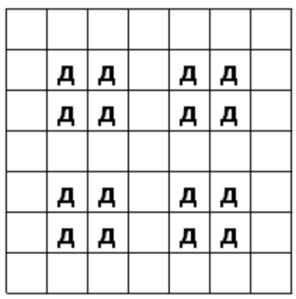
5. Чему равно максимальное произведение расстояний от внутренней точки треугольника со сторонами 3, 4, 5 до прямых, содержащих его стороны? ($\frac{16}{15}=1\frac{1}{15}$. **Заметим, что данный треугольник – прямоугольный, т.к. его стороны удовлетворяют теореме Пифагора. Пусть нужные нам отрезки, проведённые соответственно к сторонам 3, 4 и 5 равны x, y, z, тогда удвоенная площадь всего треугольника равна $12=3\cdot4=3x+4y+5z$, т.к. данные отрезки фактически являются высотами трёх треугольников, на которые разрезается исходный треугольник отрезками от внутренней точки до вершин. Из неравенства Коши следует, что $\sqrt[3]{3x\cdot4y\cdot5z}\le\frac{3x+4y+5z}{3}=\frac{12}{3}=4$, откуда получаем, что $xyz\le\frac{4^3}{3\cdot4\cdot5}=\frac{16}{15}$, при этом равенство достигается при условии $3x=4y=5z$, что возможно при соответствующих значениях x, y и z.)**

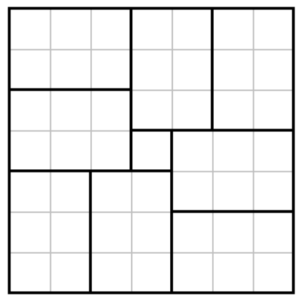


6. Окружности радиуса x и y внешним образом касаются окружности радиуса R, причём расстояние между точками касания равно a. Найдите длину общей касательной к первым двум окружностям. ($\frac{a}{R}\sqrt{(R+x)(R+y)}$. **Пусть в силу симметрии $x\le y$. Прямая, проходящая через центр O окружности радиуса x параллельно отрезку, соединяющему точки касания, пересекает окружность радиуса $y–x$ (с центром в центре окружности радиуса y) в точках A и B (см. рис.). Тогда $OA=a(R+x)/R$ и $OB=OA+a(y–x)/R=a(R+y)/R$. Тогда квадрат искомой длины общей внешней касательной равен $OA\cdot OB=(a/R)^2(R+x)(R+y)$.)**



7. На клетчатую доску 7×7 неизвестным образом ставят корабль 2×2. Какое наименьшее количество детекторов можно расположить заранее на доске так, чтобы можно было абсолютно точно определить расположение корабля? Приведите ответ и пример. (*Детектор в клетке показывает, занята клетка кораблём или нет, и ставится до появления корабля.*) (**16 детекторов – см. рис.** **Докажем оценку на 16 детекторов. Выделим на доске 8 прямоугольников 2×3 методом «пропеллера». Заметим, что в прямоугольнике 2×3 должно быть не менее двух детекторов с возможным исключением в одном прямоугольнике, где может оказаться ровно 1 детектор (причём в углу) и свободный квадрат 2×2. Но если рассмотреть два рядом стоящих прямоугольника 2×3, образующих прямоугольник 4×3, тогда в каждом из них должно оказаться хотя бы по два детектора (доказывается перебором случа-**





ев). Значит, в каждой из четырёх зон 4×3 стоит хотя бы по 4 детектора, а во всём квадрате 7×7 детекторов будет не менее 4·4=16.)

8. Василий Васильевич, вспомнил, как в студенческие времена взяв менее 100 рублей, пошёл гулять. Заходя в какой-нибудь магазин и имея при этом m рублей n копеек, он тратил n рублей m копеек. Какое наибольшее число магазинов смог посетить студент Вася? **(<u>6 магазинов</u>. Пусть при входе в первый магазин Вася имел a рублей b копеек. Ясно, что $b \le a$. Тогда при выходе он будет иметь $a-b-1$ рублей и $b-a+100$ копеек. Пусть $a-b=t\le 99$. Итак, у Васи сейчас $t-1$ рубль $100-t$ копеек. Условие возможности посещения второго магазина: $t-1\ge 100-t$, или $t>51$, т.к. t – целое. После посещения второго магазина у Васи $2t-102$ рублей и $201-2t$ копеек, чтобы можно было посетить третий, необходимо и достаточно, чтобы $t\ge 76$. Аналогично, чтобы посетить четвёртый магазин, необходимо и достаточно, чтобы $t\ge 89$, чтобы пятый – $t\ge 95$, чтобы шестой – $t\ge 98$, а чтобы седьмой – t должно быть больше, чем 99. Последнее невозможно, а предыдущее неравенство выполнимо, например, если Вася имел изначально 99 рублей 00 копеек. Проследим за состоянием кошелька в этом случае. После первого магазина остаётся 98 руб 01 коп, после второго – 96 руб 03 коп, после третьего – 92 руб 07 коп, после четвёртого – 84 руб 15 коп, после пятого – 68 руб 31 коп, после шестого – 36 руб 63 коп, в седьмом магазине расплатиться уже не удастся.)**

9. Назовём *весёлым* 9-значное число из различных ненулевых цифр, которое вместе со своим числом-«перевёртышем» (т.е. записанным цифрами в обратном порядке) будет давать минимально возможную сумму среди аналогичных пар чисел. Сколько всего весёлых чисел? **(<u>16 весёлых чисел</u>. Сумма самого числа $\overline{a_9a_8...a_1}$ и его перевёртыша равна $100000001(a_9+a_1)+10000001(a_8+a_2)+1000001(a_7+a_3)+100001(a_6+a_4)+10000a_5$. Тогда по транснеравенству минимально возможная сумма попарных произведений с ненулевыми цифрами будет в случае $a_9\le a_1\le a_8\le a_2\le a_7\le a_3\le a_6\le a_4\le a_5$. Следовательно, с учётом равенства коэффициентов получим, что $\{a_9, a_1\}=\{1, 2\}$, $\{a_8, a_2\}=\{3, 4\}$, $\{a_7, a_3\}=\{5, 6\}$, $\{a_6, a_4\}=\{7, 8\}$, $a_5=9$. Значит, всего будет $2^4=16$ чисел, т.к. в каждой из четырёх пар цифр будет по 2 варианта выбора значений для них.)**

10. В связном графе 100 вершин и 1000 рёбер, при это степени всех вершин – нечётны. Сколькими способами можно стереть часть рёбер так, чтобы степени всех вершин после этого оказались чётными? **(<u>2^{901}</u>. Будем рассуждать, допуская в нашем графе наличие кратных рёбер и петель. Пронумеруем рёбра нашего исходного графа *G*. Пусть 1000-е ребро соединяет вершины *A* и *B*. Рассмотрим граф G_1, в котором вершины *A* и *B* слились, а 1000-е ребро исчезло, при этом другие рёбра между этими вершинами превратились в петли в обобщённой вершине *AB*. Заметим теперь, что существует взаимно-однозначное соответствие между способами стирания рёбер в графах *G* и G_1, надо только правильно распорядиться ребром номер 1000 в графе *G*, чтобы степени вершин *A* и *B* оказались чётными. Таким образом, мы доказали, что объединение двух вершин со стиранием одного ребра между ними сохраняет количество способов стирания рёбер. Проделаем такую операцию 99 раз и получим граф G_{99}, состоящий из одной вершины, у которой 901 ребро-петля. Но в таком графе можно стереть любое подмножество рёбер, т.к. степень вершины окажется равна удвоенному количеству оставшихся петель, т.е. будет чётной. Количество таких подмножеств равно 2^{901}.)**

11. Два парохода идут по морю с постоянными скоростями по фиксированным направлениям. В 9.00 расстояние между ними 20 миль, в 9.35. – 15 миль и в 9.55 – 13 миль. В какой момент времени расстояние между пароходами минимально и каково это расстояние? **(<u>12 миль в 10 *ч* 20 *мин*</u>. Примем данные фиксированные направления за оси координат. Выберем за начало отсчета момент времени 9.00, за единицу измерения 5 минут. Тогда в момент времени t пароходы имеют координаты $(x-v_1t,\ 0)$ и $(0,\ y-v_2t)$, где v_1 и v_2 – скорости пароходов. Вычислим S^2 – квадрат расстояния между пароходами в момент t: $S^2=(x-v_1t)^2+(y-v_2t)^2-2(x-v_1t)(y-v_2t)\cos\alpha$, т.е. $S^2=a+2bt+ct^2$ – квадратный трехчлен относительно t. Из условия задачи для трёх моментов времени имеем систему: $400=a$, $225=a+14b+49c$, $169=a+22b+121c$. Отсюда получаем $a=400$, $b=-16$, $c=1$, следовательно, $S^2=t^2-32t+400=(t-16)^2+144$. Тогда наименьшее значение $S^2=144$ при $t=16$, что соответствует расстоянию в 12 миль в 10 *ч* 20 *мин*.)**

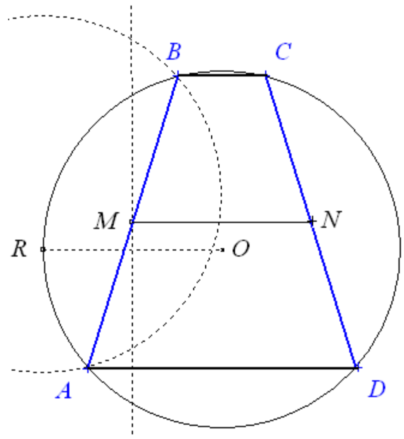
12. Найдите наибольшее натуральное число n такое, что сумма четвёртых степеней любых n простых чисел, больших 10, делится на n. **(<u>$2^4\cdot 3\cdot 5=240$</u>. Рассмотрим набор из $(n-1)$ простого числа p и**

одного простого числа q, отличного от p, тогда сумма их четвёртых степеней будет сравнима с q^4-p^4 по модулю n, т.е. q^4-p^4 должно делиться на n при любой паре различных простых p и q, больших 10. Подставим пары (11, 13) и (11, 17), тогда получим, что $13^4-11^4 \vdots n$ и $17^4-11^4 \vdots n$, значит, n – делитель НОДа этих двух чисел, который равен $240=2^4\cdot3\cdot5$, что следует из разложения этих двух чисел на простые множители. Т.е. n не превосходит 240. Теперь докажем, что для n=240 условие задачи выполняется. Получаем, что

$$p_1^4+p_2^4+\ldots+p_{240}^4 \equiv p_1^4+p_2^4+\ldots+p_{240}^4-240 \equiv (p_1^4-1)+(p_2^4-1)+\ldots+(p_{240}^4-1) \equiv 0 (\bmod 240),$$

т.к. каждая скобка делится на 2^4 (что следует из разложения на множители и нечётности наших простых чисел), на 3 (т.к. квадрат числа, не кратного 3, сравним с 1 по модулю 3, а у нас простое число, большее 10, т.е. как раз некратное 3), на 5 (что следует из малой теоремы Ферма).)

13. Из цифр 1, 2, 3, 4 , 5, 6, 7 оставьте наибольшее количество цифр, чтобы можно было составить три натуральных числа, в каждом из которых оставленные цифры использовались бы ровно по одному разу, и чтобы сумма двух чисел равнялась третьему. Приведите один из возможных примеров такой тройки чисел. **(<u>Оставить надо 5 цифр, например, 12537+23175=35712</u>. Заметим, что если при сложении двух чисел происходит переход разряда, то сумма цифр слагаемых уменьшается на 9 в записи их суммы, значит, остаток суммы цифр при делении на 9 должен сохраниться. Это возможно только тогда, когда сумма оставленных цифр будет кратна 9. Перебором показывается, что из 6 цифр с суммой 27 нельзя составить нужную тройку чисел. А с пятью цифрами такое возможно.)**



14. Какие значения может принимать угол при основании вписанной в окружность трапеции, средняя линия которой равна радиусу этой окружности? **(<u>30°<α<150° и α не равен 45°, 90° и 135°</u>. Будем строить нашу равнобедренную трапецию методом «идеального» построения (см. чертёж). Тогда точка M – середина боковой стороны AB трапеции $ABCD$ – будет двигаться по прямой, являющейся серединным перпендикуляром к некоторому радиусу OR, параллельному стороне AD. Двигая точку M по этому серединному перпендикуляру в пределах окружности получим, что по непрерывности $\angle BAD=\alpha$ будет меняться в пределах от 30° (точка A совпадёт с B и прямая AB будет стремиться к касательной) до 150° (аналогичная ситуация на другом конце рассматриваемого отрезка). Но возникнут также особые случаи: 1) α=45°, когда точка A совпадёт с R, B=C, получится равнобедренный треугольник; 2) α=135°, когда точка B совпадёт с R, A=D, также получится равнобедренный треугольник; 3) при попадании M на OR возникнет случай прямоугольника (α=90°), который по определению не является трапецией.)**

15. Каково наибольшее количество подряд идущих натуральных чисел, каждое из которых делится на произведение своих ненулевых цифр? Приведите ответ и пример с обоснованием. **(<u>13 чисел, от</u> $\underbrace{111\ldots1}_{18 единиц}1000$ <u>до</u> $\underbrace{111\ldots1}_{18 единиц}1012$<u>, все эти числа подходят, т.к. число</u> $\underbrace{111\ldots1}_{18 единиц}1000$ <u>делится на любую ненулевую цифру и прибавление её на конце делимость сохранит</u>. Больше 13 чисел быть не может, т.к. в этом ряду не могут быть два числа, отличающихся ровно на 10 и оканчивающихся на 3, на 6 и на 9 – одно из чисел каждой такой пары не делится на 3. Перебор вариантов даёт самый длинный ряд в 13 чисел от числа, оканчивающегося на 0, до числа в следующем десятке, оканчивающегося на 2.)**

16. В каждой вершине тетраэдра написано число. На каждом ребре написана сумма чисел, стоящих на его концах. Известно, что сумма чисел на рёбрах равна 1, а сумма их квадратов равна 2. Какие значения может принимать сумма их кубов? **(<u>17/18</u>. Пусть в вершинах стоят числа x_1, x_2, x_3, x_4. Тогда $(x_1+x_2)+(x_1+x_3)+\ldots+(x_3+x_4)=1$, $(x_1+x_2)^2+(x_1+x_3)^2+\ldots+(x_3+x_4)^2=2$. Из первого уравнения находим $x_1+x_2+x_3+x_4=1/3$. Преобразуем второе уравнение: $(x_1+x_2+x_3+x_4)^2+2(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)=2$, откуда $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=17/18$. Нетрудно убедиться в равенстве $(x_1+x_2)^3+(x_1+x_3)^3+\ldots+(x_3+x_4)^3=3(x_1+x_2+x_3+x_4)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)$, значит, $(x_1+x_2)^3+(x_1+x_3)^3+\ldots+(x_3+x_4)^3=3\cdot1/3\cdot17/18=17/18$. При этом заметим, что существует набор чисел, удовлетворяющих условию, например: $x_1=\frac{1}{3},\ x_2=\frac{\sqrt{15}}{6},\ x_3=-\frac{\sqrt{15}}{6},\ x_4=0$.)**