1. (А. Толпыго) (задачник "Кванта", 1990 г.) Множество натуральных чисел разбито на бесконечные арифметические прогрессии с разностями $d_1, d_2, \ldots$.

   а) Докажите, что если число прогрессий конечно, то $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \cdots = 1$.

   б) Верно ли утверждение пункта а), если число прогрессий бесконечно?

2. Плоскость освещена прожекторами, каждый из которых освещает угол.

   а) Докажите, что если число прожекторов конечно, то сумма углов не меньше 360°.

   б) Верно ли утверждение пункта а), если число углов бесконечно (счетно)?

3. Можно ли расставить в клетки бесконечной клетчатой плоскости все натуральные числа так, чтобы каждое число встречалось ровно один раз, и чтобы любые два числа из одной строки или одного столбца были взаимно простыми?

4. Существует ли такая последовательность $M = (a_1, a_2, \ldots)$ натуральных чисел, что каждое натуральное число представляется единственным образом в виде разности двух чисел из M?

5. Можно ли окрасить целочисленные точки плоскости в 2007 цветов так, чтобы все цвета присутствовали, на каждой прямой (содержащей не менее двух целых точек) раскраска была периодической, а раскраска плоскости не была периодической? (Раскраска плоскости называется периодической, если найдется ненулевой целочисленный вектор, при сдвиге на который раскраска переходит в себя.)

6. Существует ли функция $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, отличная от многочлена, такая, что $f(a) - f(b)$ делится на $a - b$ для любых различных целых a и b?

7. Докажите, что для $M > 2$ существует возрастающая последовательность $a_1, a_2, \ldots$ такоя что 1) $a_i > M^i$ для всех i; 2) целое n не равно нулю тогда и только тогда, когда существуют натуральное m и $b_1, \ldots, b_m \in \{-1, 1\}$ такие, что $n = b_1 a_1 + b_2 a_2 + \ldots + b_m a_m$.

1. (А. Толпыго) (задачник "Кванта", 1990 г.) Множество натуральных чисел разбито на бесконечные арифметические прогрессии с разностями $d_1, d_2, \ldots$.

   а) Докажите, что если число прогрессий конечно, то $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \cdots = 1$.

   б) Верно ли утверждение пункта а), если число прогрессий бесконечно?

2. Плоскость освещена прожекторами, каждый из которых освещает угол.

   а) Докажите, что если число прожекторов конечно, то сумма углов не меньше 360°.

   б) Верно ли утверждение пункта а), если число углов бесконечно (счетно)?

3. Можно ли расставить в клетки бесконечной клетчатой плоскости все натуральные числа так, чтобы каждое число встречалось ровно один раз, и чтобы любые два числа из одной строки или одного столбца были взаимно простыми?

4. Существует ли такая последовательность $M = (a_1, a_2, \ldots)$ натуральных чисел, что каждое натуральное число представляется единственным образом в виде разности двух чисел из M?

5. Можно ли окрасить целочисленные точки плоскости в 2007 цветов так, чтобы все цвета присутствовали, на каждой прямой (содержащей не менее двух целых точек) раскраска была периодической, а раскраска плоскости не была периодической? (Раскраска плоскости называется периодической, если найдется ненулевой целочисленный вектор, при сдвиге на который раскраска переходит в себя.)

6. Существует ли функция $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, отличная от многочлена, такая, что $f(a) - f(b)$ делится на $a - b$ для любых различных целых a и b?

7. Докажите, что для $M > 2$ существует возрастающая последовательность $a_1, a_2, \ldots$ такоя что 1) $a_i > M^i$ для всех i; 2) целое n не равно нулю тогда и только тогда, когда существуют натуральное m и $b_1, \ldots, b_m \in \{-1, 1\}$ такие, что $n = b_1 a_1 + b_2 a_2 + \ldots + b_m a_m$.