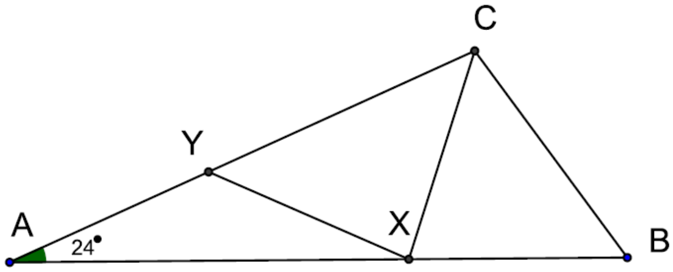
IX Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок».
VI Турнир математических игр.
Математическая игра «Пенальти».

<u>Младшая лига.</u>* <u>Решения</u>. *9 сентября 2013 года

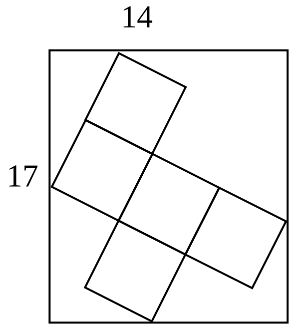
1. Сколько чисел вида $\overline{ababab}$, где $a\neq 0$ и b – различные цифры, делится на 217? **(<u>3</u>. $\overline{ababab}=10101\cdot\overline{ab}=7\cdot 1443\cdot\overline{ab}$, а 217 = 7·31. При этом число 31 – простое, и число 1443 на него не делится. Поэтому число $\overline{ababab}$ делится на 217 тогда и только тогда, когда число $\overline{ab}$ делится на 31, то есть при $\overline{ab}$, равном 31, 62 и 93.)**

2. В треугольнике ABC с углом BAC, равным 24°, на сторонах AB и AC взяты точки X и Y соответственно. При этом окружность с центром в Y, проходящая через A, проходит также через X, а окружность с центром в X, проходящая через B, проходит также через C и Y. Найдите $\angle ABC$. **(<u>54°</u>. Заметим, что $AY = XY$, так как X лежит на окружности с центром в Y, проходящей через A. Тогда ΔAYX является равнобедренным, и $\angle AXY = \angle XAY$ = 24°. Поскольку $\angle XYC$ – внешний для треугольника AXY, то $\angle XYC = \angle AXY + \angle XAY$ = 48°. Точки Y, C, B лежат на окружности с центром в X, поэтому $XY = XC = XB$, треугольники YXC и BXC являются равнобедренными. Значит, $\angle XCY = \angle XYC$ = 48°, $\angle XCB = \angle ABC$. Сумма углов в треугольнике ABC должна быть равна 180°, поэтому 180° = $\angle BAC + \angle XCY + \angle XCB + \angle ABC$ = 24° + 48° + 2$\angle ABC$. Отсюда получаем, что 2$\angle ABC$ = 180° − 24° − 48° = 108°, тем самым $\angle ABC$ = 54°.)**



3. Сколько существует различных расстановок чисел от 1 до 6 в ряд в некотором порядке так, чтобы каждое из них, начиная со второго, отличалось от предыдущего на целое число процентов? **(<u>48 расстановок</u>. После 6 может стоять только 3, аналогично, после тройки может стоять только 6. Получаем, что 3 и 6 стоят на последних местах в произвольном порядке. Т.к. 100 делится и на 1, и на 2, и на 4, и на 5, то после каждого из этих чисел может стоять любое натуральное число. Значит, сначала стоят 1, 2, 4, 5 в любом порядке, а потом 3 и 6, также в любом порядке. Итого получается 4!·2!=48 различных способов.)**

4. Фигура, состоящая из пяти одинаковых квадратов, вписана в прямоугольнике 14×17 так, как показано на рисунке. Найдите сторону квадрата. **(<u>$\sqrt{202}/3$</u>. Проецируя стороны квадратов на стороны прямоугольника, мы получим проекции двух видов: «короткие» – длины x, и «длинные» – длины y. Проецируя влево, получаем, что $2x+3y$ = 17, проецируя вниз – что $x+3y$ = 14, откуда x = 3, y = 11/3, а сторона квадрата равна $\sqrt{202}/3$.)**



5. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $abcd=a+b+c+d$? **(Четвёрки чисел 1, 1, 2 и 4 в произвольном порядке – <u>12 вариантов</u>. Рассмотрим в силу симметрии один случай $a\geq b\geq c\geq d$. При d=1 и c=1 возникает уравнение**

$ab=a+b+2$, из которого $(a-1)(b-1)=3$, значит, $a=4$, $b=2$. В случае $d=1$ и $c\geq2$ получим, что уравнение не имеет решений, т.к. $abcd=abc\geq4a>3a+1\geq a+b+c+1=a+b+c+d$. При $d\geq2$ уравнение также не имеет решений, т.к. $abcd\geq8a>4a\geq a+b+c+d$.)

6. В клетках таблицы 4×4 по одному расставлены все целые числа от 1 до 16. Раз в минуту каждое число таблицы заменяется на среднее арифметическое своих соседей (по стороне клетки). Какое наименьшее возможное значение может быть у самого меньшего числа таблицы через две минуты? (**$\frac{13}{6}=2\frac{1}{6}$. Разберём три возможных случая расположения меньшего числа через две минуты – в углу, на стороне и в центре, и оценим его значение. Получим, что минимальное значение 13/6 будет при расположении этого числа в углу (на месте 1) со следующим расположением чисел от 1 до 4.)**

3			
	2		
1		4	

7. Восемь хоккейных команд соревнуются между собой за выход в финальную четвёрку в ходе однокругового турнира. (Каждые две встречаются один раз. За выигрыш даётся два очка, за ничью – одно очко, за проигрыш – 0 очков.) Какое наименьшее число очков гарантирует выход в финальную четвёрку? (**Докажем, что выход в финальную четвёрку гарантирован команде, набравшей 11 очков. Предположим противное: пусть некоторые 5 команд набрали не менее чем по 11 очков. В 10 играх между собой эти 5 команд набрали в сумме 20 очков, а в играх с 3 остальными – не более 2·3·5=30, т. е. всего они набрали не более 50<5·11 очков, что противоречит нашему предположению. С другой стороны, 10 очков ещё не гарантируют выход в финал. Действительно, если какие-то 5 команд все матчи между собой сыграют вничью, а у остальных 3 команд выиграют, то каждая из них наберёт по 4+6=10 очков, но может не попасть в финальную четвёрку.)**

8. Выбрали 100 последовательных натуральных чисел. На какие две цифры может оканчиваться сумма восьмых степеней этих чисел? (**30. Очевидно, что две последние цифры суммы восьмых степеней равны последним двум цифрам суммы восьмых степеней чисел от 00 до 99.** $\sum_{k=0}^{99}k^8=\sum_{x=0}^{9}\sum_{y=0}^{9}(10x+y)^8=\sum_{x=0}^{9}\sum_{y=0}^{9}((10x)^8+8(10x)^7+\ldots+8\cdot10xy^7+y^8)$. **Заметим, что на две последние цифры влияют только два последних слагаемых.** $\sum_{x=0}^{9}\sum_{y=0}^{9}(80xy^7+y^8)=\sum_{y=0}^{9}(80\cdot45y^7+10y^8)$. **Первое слагаемое оканчивается на два нуля, вся сумма на 0, поэтому предпоследнюю цифру мы получим от** $\sum_{y=0}^{9}y^8$. **Посмотрим последние цифры 2-х степеней (0149656941), 4-х степеней (0161656161) и 8-х степеней (0161656161), последняя сумма равна 4·(1+6)+5=33. Тогда нужная нам сумма оканчивается на 30.)**

9. Назовём натуральное число *зеброй*, если в его записи строго чередуются две цифры, разные по чётности, например, число 303030 – зебра. Сколько существует 9-значных зебр, которые при удвоении также окажутся зеброй? **(3 зебры – 505050505, 707070707 и 909090909, из которых при удвоении получатся зебры 1010101010, 1414141414 и 1818181818. Пусть число** $\overline{ababababa}$ **- зебра, где** a **и** b **–**

цифры разной чётности. Если при умножении на 2 не будет перехода 1 в разрядах, то получится число из чётных цифр, т.е. не зебра. Если переход 1 будет из разряда цифры *b*, то последняя и третья с конца цифры удвоенного числа будут отличаться на 1, т.е. различны, чего в зебре быть не должно. Значит, 1 может переходить только из разряда цифры *a*, тогда удвоенное число окажется 10-значным и будет начинаться на 1, т.е. эта зебра будет иметь вид $\overline{1c1c1c1c1c}$, где *c* – чётная цифра. Перебирая 5 возможных вариантов цифры *c* и деля получаемое число на 2, получим, что изначально зебра могла быть только при цифре *c*, равной 0, 4 и 8, что и даёт нам три нужных числа.)

10. В шахматном турнире участвуют 20 шахматистов. В данный момент ситуация в турнире такова, что в любой группе из 18 шахматистов всегда можно выделить 9 непересекающихся пар шахматистов, уже сыгравших между собой. Какое наименьшее количество партий могло быть сыграно в турнире к этому моменту? **(<u>30 партий</u>. Если для некоторого шахматиста *A* найдутся 17 не сыгравших с ним, то *A* и эти 17 шахматистов образуют группу из 18 человек, в которой нет 9 пар сыгравших между собой. Значит, каждый шахматист сыграл не менее трёх партий. Поэтому количество сыгранных партий в турнире не менее 20·3/2=30. В качестве примера можно привести следующий. Разместим шахматистов по кругу A_1, A_2, …, A_{20} и пусть каждый сыграл с двумя соседями по кругу и с «диаметрально» противоположным соперником (A_n–A_{n+10}, где n – номер от 1 до 10). Если в группу из 18 человек не входят шахматисты с номерами разной чётности, то оставшихся можно разбить на пары соседей. Если же в группы не входят два шахматиста с номерами одной чётности, то можно для определённости считать, что это A_1 и A_{2k+1}, где *k* – натуральное число в пределах от 1 до 5. Тогда берём пару A_2–A_{12}, а оставшихся 16 шахматистов можно разбить на пары соседей, сыгравших между собой.)**

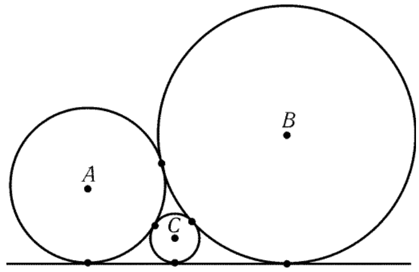
11. Найдите количество квадратных трёхчленов вида x^2+ax+b с натуральными коэффициентами, дающими в произведении 2^{2013}, и имеющих действительные корни. **(<u>1342</u>. Т.к. трёхчлен имеет действительные корни, то его дискриминант $D=a^2-4b\geq 0$, при этом в силу натуральности коэффициентов и условия $ab=2^{2013}$ имеем $a=2^n$, где *n* – целое неотрицательное число, не превосходящее 2013. Получаем неравенство $2^{2n}\geq 4\cdot 2^{2013-n}$, откуда $3n\geq 2015$, значит, $671,(6)\leq n\leq 2013$, что выполняется при 1342-х значениях *n*.)**

12. Длина круга стадиона равна 400м. Три бегуна одновременно стартовали в часовом забеге с одной стартовой линии, каждый – со своей постоянной скоростью. Первый бегун пробежал 20 км, второй – 19 км, третий – 18км. Сколько раз во время этого забега один из бегунов обгонял другого? **(<u>8 раз</u>. Первый пробежал за час 50 кругов, второй – 47,5 кругов, третий – 45 кругов. Тогда первый обогнал второго 2 раза, третьего – 4 раза, а второй обогнал третьего 2 раза.)**

13. Сколько годов в XXI веке представляются в виде суммы трёх степеней двойки, больших 1? **(<u>16</u>. Подойдут все годы, где одно из слагаемых равно 2048, а два других из набора (2, 4, 8, 16, 32), при этом они могут быть и одинаковыми слагаемыми, кроме случая 32+32, что уже даст больше 2100. Получим $C_5^2+4=\frac{5\cdot 4}{2}+4=14$ случаев. Кроме того, подойдут все годы, равные сумме 1024+1024 и одного числа из рассмотренного выше набора (5 случаев), но случаи с 4, 8, 16 и 32 дают повтор чисел, разобранных ранее**

(1024+1024+4=2048+2+2 и т.д.). И есть ещё сумма 1024+512+512=2048. Тогда всего 14+5–4+1=16 годов.)

14. Три окружности с центрами A, B и C, касающиеся друг друга и прямой l, расположены так, как показано на рисунке. Пусть a и b – радиусы окружностей с центрами A и B соответственно. Найдите радиус окружности с центром C. **(** $c=\frac{ab}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$ **. Пусть A_1, B_1 и C_1 – проекции точек A, B и C на прямую l; C_2 – проекция точки C на прямую AA_1. По теореме Пифагора $CC_2^2=AC^2–AC_2^2$, т. е. $A_1C_1^2=(a+c)^2–(a–c)^2=4ac$, где c – радиус окружности с центром C. Аналогично $B_1C_1^2=4bc$ и $A_1B_1^2=4ab$. Так как $A_1C_1+C_1B_1=A_1B_1$, то $\sqrt{ac}+\sqrt{bc}=\sqrt{ab}$, т.е. $c=\frac{ab}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$.)**



15. Сумма трёх трёхзначных чисел равна 2013. Какие значения может принимать сумма трёх новых чисел, получаемых из прежних перестановкой первых и третьих цифр в числах? Значения сумм выписать по возрастанию. **(<u>330, 429, 528, 1320, 1419, 1518, 2409, 2508</u>. Пусть наши числа равны $\overline{a_1b_1c_1}$, $\overline{a_2b_2c_2}$ и $\overline{a_3b_3c_3}$, тогда, разбирая случаи возможных значений для сумм цифр $c_1+c_2+c_3$, $b_1+b_2+b_3$ и $a_1+a_2+a_3$, получим все варианты, приведённые выше.)**

16. На клетчатой бумаге отмечен прямоугольник $m\times n$ клеток (его стороны на линиях сетки). Известно, что числа m и n взаимно просты, $m<n$, и что диагональ этого прямоугольника не пересекает ровно 116 его клеток. Найдите все такие прямоугольники. **(<u>2×117 и 3×59</u>. Так как числа m и n взаимно просты, диагональ не проходит через другие узлы сетки, кроме тех, которые расположены в вершинах. Поэтому диагональ пересечёт все $m-1$ вертикальные линии сетки и все $n-1$ горизонтальные в разных точках. При каждом пересечении добавится ровно одна клетка, которую диагональ пересекает. Итого диагональ пересекает $(m-1)+(n-1)+1$ клетку, значит, не пересекает $mn-m-n+1=(m-1)(n-1)$ клетку. Уравнение $(m-1)(n-1)=116=2^2\cdot29$ имеет в натуральных числах 3 решения (с точностью до порядка m и n): (2; 117); (3; 59); (5; 30), но последняя пара невозможна ввиду взаимной простоты чисел m и n. Получаем прямоугольники двух видов 2×117 и 3×59.)**