IX Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». VI Турнир математических игр.

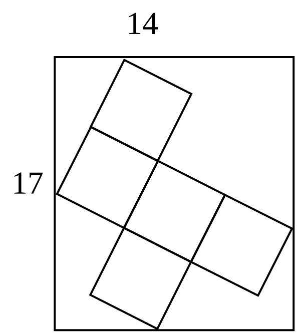
Математическая игра «Пенальти».

<u>Старшая лига.</u>* <u>Решения</u>. *9 сентября 2013 года

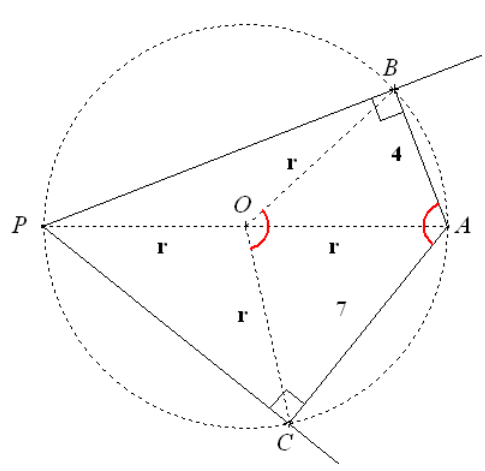
1. Найдите x и m, если $\dfrac{\sin 3x\cdot\cos(60^\circ-4x)+1}{\sin(60^\circ-7x)-\cos(30^\circ+x)+m}=0$. (Ответ для x дать в градусах.) **(<u>$x=n\cdot360^\circ+150^\circ$, где n – целое число; действительное число $m\neq-2$</u>. Возможны два случая. 1). $\sin3x=-1$, $\cos(60^\circ-4x)=1$, откуда $x=k\cdot120^\circ+90^\circ$ и $x=n\cdot90^\circ+15^\circ$ (k и n – целые числа), следовательно, $6n-8k=5$, что невозможно, т.к. левая часть чётна, а правая – нечётна. 2). $\sin3x=1$, $\cos(60^\circ-4x)=-1$, откуда $x=k\cdot120^\circ+30^\circ$ и $x=n\cdot90^\circ+60^\circ$, поэтому $4k=3n+1$ или $k-1=3(n-k)$, значит, $k=3p+1$ (p – целое); $x=p\cdot360^\circ+150^\circ$. Подставляя это значение x в знаменатель, получаем условие $m\neq-2$.)**

2. Пусть a, b и c – положительные числа, $abc=1$. Найдите наименьшее значение произведения $(1+a)(1+3b)(1+9c)$. **(<u>64</u>, при $a=3$, $b=1$, $c=1/3$. *<u>Решение 1</u>*. $(1+a)(1+3b)(1+9c) = 1+a+3b+9c+3ab+9ac+27bc+27abc \geq 1+9+27+27 = 64$, поскольку в силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим $a+3b+9c \geq 3\sqrt[3]{a\cdot3b\cdot9c}=9$ и $3ab+9ac+27bc \geq 3\sqrt[3]{3ab\cdot9bc\cdot27ca}=27$. *<u>Решение 2</u>*. Сделаем замену переменных $a=x$, $3b=y$, $9c=z$. Тогда необходимо найти минимальное значение произведения $(1+x)(1+y)(1+z)$ при условии, что произведение положительных чисел x, y, z равно 27. Здесь уже очевидным образом после раскрытия скобок применяем неравенство Коши для 8 положительных чисел.)**

3. Над числом n проводятся следующие операции: если число делится на 3, то делим его на 3, а если оно не делится на 3, то вычитаем единицу. Из скольких чисел число 1 получается за 13 ходов? **(<u>2632</u>. Пусть N_i – количество чисел, из которых 1 получается за i ходов. Тогда $N_1=2$, $N_2=3$, $N_3=6$, $N_4=11$. Если последний ход был делением, то остальные ходы могли быть произвольными (и их количество равно N_{i-1}), а если последний ход был вычитанием, то предыдущие два хода могли быть любыми, кроме двух вычитаний, т.е. их количество равно $N_{i-1}-N_{i-4}$. Т.е. $N_i=2N_{i-1}-N_{i-4}$. Отсюда находим $N_5=20$, $N_6=37$, $N_7=68$, $N_8=125$, $N_9=230$, $N_{10}=423$, $N_{11}=778$, $N_{12}=1431$, $N_{13}=2632$.)**



4. Фигура, состоящая из пяти одинаковых квадратов, вписана в прямоугольнике 14×17 так, как показано на рисунке. Найдите сторону квадрата. **(<u>$\sqrt{202}/3$</u>. Проецируя стороны квадратов на стороны прямоугольника, мы получим проекции двух видов: «короткие» – длины x, и «длинные» – длины y. Проецируя влево, получаем, что $2x+3y=17$, проецируя вниз – что $x+3y=14$, откуда $x=3$, $y=11/3$, а сторона квадрата равна $\sqrt{202}/3$.)**



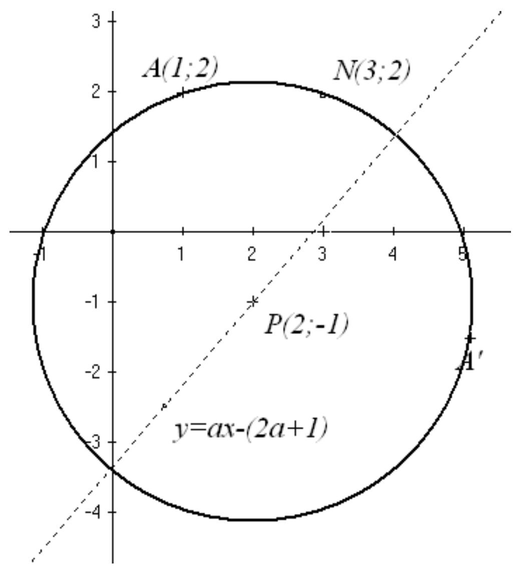
5. Внутри угла в 60° расположена точка на расстояниях 4 и 7 от его сторон. Найдите расстояние от этой точки до вершины угла. **(<u>$2\sqrt{31}$</u>. Пусть P – вершина угла, A – точка внутри угла такая, что рас-**

стояния от неё от сторон угла AB=4 и AC=7. Т.к. $\angle B=\angle C$=90°, то четырёхугольник $ABPC$ – вписанный в окружность с диаметром AP, а $\angle BAC$=180°−$\angle BPC$=120°. Пусть O – центр описанной окружности этого четырёхугольника, при этом O – середина диаметра AP=2r. Тогда BC^2 можно найти по теореме косинусов из двух треугольников BOC и BAC, в которых $\angle BOC=2\angle BPC$=120°=$\angle BAC$. Значит, $BC^2=r^2+r^2-2r^2\cdot\cos 120°= AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos 120°$, т.е. $2r^2+r^2=3r^2=4^2+7^2+4\cdot 7=93$, т.е. r^2=31. Тогда диаметр AP=2r= $2\sqrt{31}$.)

6. В клетках таблицы 4×4 по одному расставлены все целые числа от 1 до 16. Раз в минуту каждое число таблицы заменяется на среднее арифметическое своих соседей (по стороне клетки). Какое наименьшее возможное значение может быть у самого меньшего числа таблицы через две минуты? **($\frac{13}{6}=2\frac{1}{6}$. Разберём три возможных случая расположения меньшего числа через две минуты – в углу, на стороне и в центре, и оценим его значение. Получим, что минимальное значение 13/6 будет при расположении этого числа в углу (на месте 1) со следующим расположением чисел от 1 до 4.)**

3			
	2		
1		4	

7. На координатной плоскости xOy отмечена точка $A(1;\ 2)$. За один ход разрешается выбрать действительное число a и отметить на плоскости точку, симметричную одной из уже отмеченных относительно прямой $y = ax - (2a + 1)$. Укажите геометрическое место точек, которые могут быть отмечены за один ход. *Ответ дать одним предложением.* **(Окружность с центром в точке $P(2;\ -1)$ радиуса $\sqrt{10}$, за исключением точки $N(3;\ 2)$. Заметим, что при всяком a прямая $y = ax - (2a + 1)$ проходит через точку $P(2;\ -1)$. Так как при симметрии относительно некоторой прямой l расстояние от любой точки этой прямой до любой точки F и до её образа F' одинаково, все отмеченные точки будут находиться на одном и том же расстоянии от точки P, равном $PA=\sqrt{(2-1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{10}$. Значит, все отмеченные точки лежат на окружности с центром в точке $P(2;\ -1)$ радиуса $\sqrt{10}$. Заметим, что выбирая параметр a, мы можем получить любую прямую, проходящую через точку P, кроме вертикальной. Любые две точки окружности симметричны относительно единственной прямой, проходящей через центр окружности, поэтому за один ход мы можем получить любую точку этой окружности, кроме точки N, симметричной точке A, относительно вертикальной прямой, проходящей через точку P. Уравнение этой прямой x=2, а координаты точки N тогда (3; 2).)**



8. Выбрали 100 последовательных натуральных чисел. На какие две цифры может оканчиваться сумма восьмых степеней этих чисел? **(30. Очевидно, что две последние цифры суммы восьмых степеней равны последним двум цифрам суммы восьмых степеней чисел от 00 до 99.**

$\sum_{k=0}^{99} k^8 = \sum_{x=0}^{9}\sum_{y=0}^{9}(10x+y)^8 = \sum_{x=0}^{9}\sum_{y=0}^{9}((10x)^8 + 8(10x)^7 + \ldots + 8\cdot 10xy^7 + y^8)$. **Заметим, что на две последние цифры влияют только два последних слагаемых.** $\sum_{x=0}^{9}\sum_{y=0}^{9}(80xy^7 + y^8) = \sum_{y=0}^{9}(80\cdot 45y^7 + 10y^8)$. **Первое слагаемое оканчивается на два нуля, вся сумма на 0, поэтому предпоследнюю цифру мы получим от** $\sum_{y=0}^{9} y^8$. **Посмотрим последние цифры 2-х степеней (0149656941), 4-х степеней (0161656161) и 8-х степеней (0161656161), последняя сумма равна 4·(1+6)+5=33. Тогда нужная нам сумма оканчивается на 30.)**

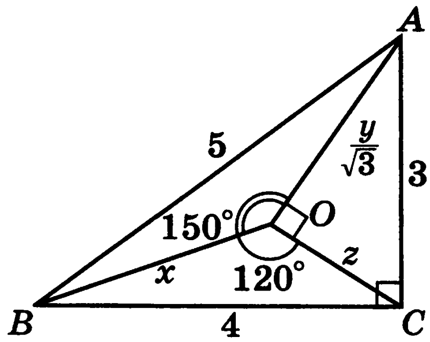
9. На доске написано 100 единиц. За один ход разрешается стереть любое из чисел и одновременно написать два новых вдвое меньших числа. При каком наибольшем натуральном k можно гарантировать, что в наборе в любой момент времени найдётся k равных чисел? **(<u>k=51</u>. Допустим, что $k \le 50$. Тогда есть такой набор чисел, в котором каждое число встречается не более 50 раз. Пусть самое маленькое число в нем равно 2^{-m}. Тогда сумма всех этих чисел не превосходит $50(2^{-m}+2^{-m+1}+\ldots+1)$, что меньше 100. Противоречие. Итак, $k \ge 51$. Осталось построить пример, когда нет 52 равных чисел. Для этого сохраним 51 единицу, а 49 единиц разделим пополам. Получится 98 чисел 1/2. 51 из них сохраним, оставшиеся 47 снова поделим пополам и т.д. Когда после очередного деления пополам «половинок» окажется меньше 51 (это случится, ибо количество чисел, подлежащих делению пополам, с каждым шагом убывает), мы получим искомый пример.)**

10. В шахматном турнире участвуют 20 шахматистов. В данный момент ситуация в турнире такова, что в любой группе из 18 шахматистов всегда можно выделить 9 непересекающихся пар шахматистов, уже сыгравших между собой. Какое наименьшее количество партий могло быть сыграно в турнире к этому моменту? **(<u>30 партий</u>. Если для некоторого шахматиста A найдутся 17 не сыгравших с ним, то A и эти 17 шахматистов образуют группу из 18 человек, в которой нет 9 пар сыгравших между собой. Значит, каждый шахматист сыграл не менее трёх партий. Поэтому количество сыгранных партий в турнире не менее 20·3/2=30. В качестве примера можно привести следующий. Разместим шахматистов по кругу $A_1, A_2, \ldots, A_{20}$ и пусть каждый сыграл с двумя соседями по кругу и с «диаметрально» противоположным соперником (A_n–A_{n+10}, где n – номер от 1 до 10). Если в группу из 18 человек не входят шахматисты с номерами разной чётности, то оставшихся можно разбить на пары соседей. Если же в группы не входят два шахматиста с номерами одной чётности, то можно для определённости считать, что это A_1 и A_{2k+1}, где k – натуральное число в пределах от 1 до 5. Тогда берём пару A_2–A_{12}, а оставшихся 16 шахматистов можно разбить на пары соседей, сыгравших между собой.)**

11. Положительные x, y и z удовлетворяют системе уравнений

$$x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 25,\quad \frac{y^2}{3} + z^2 = 9 \quad \text{и} \quad z^2 + zx + x^2 = 16.$$

Какое наибольшее значение может принимать величина $xy + 2yz + 3zx$? **(<u>$24\sqrt{3}$</u>. Данной системе можно поставить в соответствие прямоугольный треугольник ABC со сторонами 3, 4 и 5, с внутренней точкой O такой, что треугольникам OAB, OBC и OCA согласно теореме косинусов соответствуют уравнения системы**

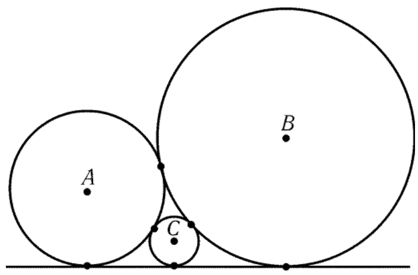


(см. чертёж). Тогда $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{y}{\sqrt{3}}\cdot\sin 150° + \frac{1}{2}\cdot\frac{y}{\sqrt{3}}\cdot z + \frac{1}{2}\cdot zx\cdot\sin 120°$ = $\frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{y}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{y}{\sqrt{3}}\cdot z + \frac{1}{2}\cdot zx\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$ = $\frac{1}{4\sqrt{3}}(xy + 2yz + 3zx)$**. Т.к. площадь треугольника *ABC* равна 6, то** $xy + 2yz + 3zx = 24\sqrt{3}$**, т.е. наше выражение принимает единственное значение.)**

12. В окружности радиуса 1 дана хорда *AB* длины $\sqrt{3}$. Рассматриваются всевозможные хорды *CD* такие, что *CA*||*BD* (все точки *A*, *B*, *C*, *D* – различные). Найдите геометрическое место середин хорд *CD*. *Ответ дать одним предложением.* **(Окружность радиуса ½ с тем же центром, вписанная в равносторонний треугольник со стороной *AB*, с тремя выколотыми точками – серединами сторон этого треугольника. Из параллельности хорд *AB* и *CD* следует, что *CD*=*AB*. Следовательно, середина *CD* удалена от центра окружности на такое же расстояние, что и середина *AB*, т.е. на ½. Проверим, всякую ли точку окружности радиуса ½ можно получить таким образом. Для этого в каждой точке окружности с радиусом ½ построим отрезок касательной, являющийся нужной хордой исходной окружности. Оказывается, что для середин сторон вписанного в исходную окружность равностороннего треугольника со стороной *AB*, нет соответствующих параллельных хорд с вершинами, отличными от точек *A* и *B*.)**

13. Найдите значение параметра *a*, при котором число $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ является корнем уравнения $x^3+ax-4=0$. **(*a*=3. Нетрудно убедиться, что данное число равно 1, значит, 1 должен быть корнем нашего уравнения, откуда и находим *a*=3.)**

14. Три окружности с центрами *A*, *B* и *C*, касающиеся друг друга и прямой *l*, расположены так, как показано на рисунке. Пусть *a* и *b* – радиусы окружностей с центрами *A* и *B* соответственно. Найдите радиус окружности с центром *C*. ($c = \frac{ab}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$. **Пусть A_1, B_1 и C_1 – проекции точек *A*, *B* и *C* на прямую *l*; C_2 – проекция точки *C* на прямую AA_1. По теореме Пифагора $CC_2^2=AC^2-AC_2^2$, т. е. $A_1C_1^2=(a+c)^2-(a-c)^2=4ac$, где *c* – радиус окружности с центром *C*. Аналогично $B_1C_1^2=4bc$ и $A_1B_1^2=4ab$. Так как $A_1C_1+C_1B_1=A_1B_1$, то** $\sqrt{ac}+\sqrt{bc}=\sqrt{ab}$**, т.е.** $c = \frac{ab}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$ **.)**



15. Сумма трёх трёхзначных чисел равна 2013. Какие значения может принимать сумма трёх новых чисел, получаемых из прежних перестановкой первых и третьих цифр в числах? Значения сумм выписать по возрастанию. **(330, 429, 528, 1320, 1419, 1518, 2409, 2508. Пусть наши числа равны** $\overline{a_1b_1c_1}$ **,** $\overline{a_2b_2c_2}$ **и** $\overline{a_3b_3c_3}$ **, тогда, разбирая случаи возможных значений для сумм цифр $c_1+c_2+c_3$, $b_1+b_2+b_3$ и $a_1+a_2+a_3$, получим все варианты, приведённые выше.)**

16. На клетчатой бумаге отмечен прямоугольник $m\times n$ клеток (его стороны на линиях сетки). Известно, что числа *m* и *n* взаимно просты, $m<n$, и что диагональ этого прямоугольника не пересекает ровно 116 его клеток. Найдите все такие прямоугольники. **(2×117 и 3×59. Так как числа *m* и *n* взаимно просты, диагональ не проходит через другие узлы сетки, кроме тех, которые расположены в вершинах. Поэтому диагональ пересечёт все $m-1$ вертикальные линии сетки и все $n-1$ горизонтальные в разных точках. При каждом пересечении добавится ровно одна клетка, которую диагональ пересекает. Итого диагональ пересекает $(m-1)+(n-1)+1$ клетку, значит, не пересекает $mn-m-n+1=(m-1)(n-1)$ клетку. Уравнение $(m-1)(n-1)=116=2^2\cdot 29$ имеет в натуральных числах 3 решения (с точностью до порядка *m* и *n*): (2*;* 117), (3*;* 59), (5*;* 30), но последняя пара невозможна ввиду взаимной простоты чисел *m* и *n*. Получаем прямоугольники двух видов 2×117 и 3×59.)**