Девятый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 20–26.09.2014

Гранд-лига, 1 тур. 21.09.2014

1. Точки O и H — центр описанной окружности и ортоцентр остроугольного треугольника ABC соответственно. Постройте циркулем и линейкой на стороне BC такую точку P, что $\angle AHP = \angle AOP$.

2. Дана функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условию

$$f(xy) + f(y-x) \geqslant f(y+x)$$

при всех действительных x, y. Докажите, что $f(x) \geqslant 0$ при всех действительных x.

3. Найдите все пары натуральных чисел n и k такие, что $n + 2^n = k!$.

4. Окружность Ω описана около треугольника ABC. На сторонах AB и BC отмечены точки X и Y такие, что $AX/XB = BY/YC$. Прямая XY пересекает Ω в точках K и L. Точки M и N выбраны на касательной к Ω в точке B так, что $MX \parallel BC$ и $NY \parallel AB$. Докажите, что точки K, L, M и N лежат на одной окружности.

5. В графе $3n$ вершин и $5n$ рёбер. Докажите, что в нём есть два простых цикла равной длины.

6. Дано натуральное n. Натуральное число k, не превосходящее n, назовём *хорошим*, если у НОД(n, k) чётное количество различных простых делителей, и *плохим* иначе. Для каждого n выясните, каких чисел больше: хороших или плохих?

7. Дан каркас куба с ребром 1. На этом каркасе сидят 8 пауков, при этом расстояние между любыми двумя (измеряемое кратчайшим путём по ребрам куба) не меньше R. При каком наибольшем R это возможно?

8. На плоскости дано n различных точек. За один ход разрешается выбрать любые три отмеченных точки A, B, C и переставить их в вершины правильного треугольника, центр которого совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC. При каких n из произвольной начальной расстановки можно получить правильный n-угольник?

9. Найдите наименьшее действительное число c такое, что неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} x_j \right)^2 \leqslant c \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

выполнено для любого натурального n и любых положительных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

10. Двое юношей и 1000 девушек на трёхместной лодке переправляются с левого берега реки на правый. Каждый юноша должен хотя бы раз пересечь реку с каждой девушкой (при этом в лодке может быть и три человека). Можно ли выполнить такую переправу, сделав при этом не более 900 рейсов с левого берега на правый?

Девятый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 20–26.09.2014

Гранд-лига, 1 тур. 21.09.2014

1. Точки O и H — центр описанной окружности и ортоцентр остроугольного треугольника ABC соответственно. Постройте циркулем и линейкой на стороне BC такую точку P, что $\angle AHP = \angle AOP$.

2. Дана функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условию

$$f(xy) + f(y-x) \geqslant f(y+x)$$

при всех действительных x, y. Докажите, что $f(x) \geqslant 0$ при всех действительных x.

3. Найдите все пары натуральных чисел n и k такие, что $n + 2^n = k!$.

4. Окружность Ω описана около треугольника ABC. На сторонах AB и BC отмечены точки X и Y такие, что $AX/XB = BY/YC$. Прямая XY пересекает Ω в точках K и L. Точки M и N выбраны на касательной к Ω в точке B так, что $MX \parallel BC$ и $NY \parallel AB$. Докажите, что точки K, L, M и N лежат на одной окружности.

5. В графе $3n$ вершин и $5n$ рёбер. Докажите, что в нём есть два простых цикла равной длины.

6. Дано натуральное n. Натуральное число k, не превосходящее n, назовём *хорошим*, если у НОД(n, k) чётное количество различных простых делителей, и *плохим* иначе. Для каждого n выясните, каких чисел больше: хороших или плохих?

7. Дан каркас куба с ребром 1. На этом каркасе сидят 8 пауков, при этом расстояние между любыми двумя (измеряемое кратчайшим путём по ребрам куба) не меньше R. При каком наибольшем R это возможно?

8. На плоскости дано n различных точек. За один ход разрешается выбрать любые три отмеченных точки A, B, C и переставить их в вершины правильного треугольника, центр которого совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC. При каких n из произвольной начальной расстановки можно получить правильный n-угольник?

9. Найдите наименьшее действительное число c такое, что неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} x_j \right)^2 \leqslant c \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

выполнено для любого натурального n и любых положительных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

10. Двое юношей и 1000 девушек на трёхместной лодке переправляются с левого берега реки на правый. Каждый юноша должен хотя бы раз пересечь реку с каждой девушкой (при этом в лодке может быть и три человека). Можно ли выполнить такую переправу, сделав при этом не более 900 рейсов с левого берега на правый?