Девятый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 20–26.09.2014

Гранд-лига, 2 тур. 22.09.2014

1. Пусть n — натуральное число, а z — комплексное число такое, что $z^n = 1$, но $z^k \neq 1$ при всех натуральных $k < n$. Найдите (в замкнутой форме) значение выражения

$$\prod_{k=1}^{n}(1 - 3z^k - z^{2k}).$$

2. На плоскости даны три выпуклых многоугольника P, Q и R площади 4 каждый (возможно, многоугольники пересекаются). Докажите, что в каждом многоугольнике можно выбрать по точке так, чтобы треугольник с вершинами в этих точках имел площадь, не меньшую 1.

3. Пусть BE и CF — высоты остроугольного треугольника ABC с $\angle A = 60°$, пересекающиеся в точке H. На отрезках BH и HF выбраны точки M и N соответственно таким образом, что $BM = CN$. Чему может равняться величина $\frac{OM}{MN}$, где O — центр описанной окружности треугольника ABC?

4. Рассмотрим натуральные числа a, b и n, удовлетворяющие равенству $2^n - 1 = ab$. Пусть 2^d — максимальная степень двойки, которая делит число $(a+1)(b-1)$. Докажите, что число d чётно.

5. Последовательность $a_1, a_2, \ldots$ задана условиями $a_1 = 1$, $a_{2n} = a_n$, $a_{2n+1} = a_n + a_{n+1}$ при всех натуральных n. Для данного натурального n найдите количество натуральных m таких, что $a_{2m-1} = n$.

6. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны AC в точке Q. Точка M — середина стороны AC; точка K — ортоцентр треугольника BIC. Докажите, что прямые KQ и IM перпендикулярны.

7. По кругу стоят 100 коробок, в одной лежит 777 камней, остальные — пустые. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход можно переложить один или несколько камней (но не все) из коробки в соседнюю пустую. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?

8. Клетчатый квадрат 9999×9999 разрезан на клетчатые прямоугольники. Может ли периметр каждого из них равняться 22?

9. Джо взял 1000 единичных кубиков и склеил гранями так, что получилось связное тело. Затем он отметил все вершины кубиков и нарисовал все их рёбра. Полученный граф оказался планарным. Найдите наименьшее возможное количество отмеченных вершин.

10. Докажите, что для всех вещественных a и b верно неравенство

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1) + 50 \geqslant 2(2a + 1)(3b + 1).$$