IX *Южный математический турнир • 2014 год*
Лига «Юниор» • 22 сентября

Второй тур.

1. Несколько хамелеонов двух цветов — красного и синего — стоят по кругу. Каждую минуту все хамелеоны, оба соседа которых того же цвета, что и сам хамелеон, меняют свой цвет. Известно, что перекрашивания продолжались ровно 2014 минут, после чего прекратились. Какое минимальное количество хамелеонов могло стоять в круге?

2. Докажите, что для любого натурального числа n существуют попарно различные натуральные числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ такие, что $a_n! = a_{n-1}!a_{n-2}!\dots a_1!$.

3. На серединных перпендикулярах к сторонам AB и BC треугольника ABC отмечены точки E и F соответственно. Оказалось, что $AEFC$ — параллелограмм. Докажите, что отрезок AE равен радиусу описанной окружности.

4. По кругу стоят 100 коробок, в одной лежит 777 камней, остальные — пустые. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход можно переложить один или несколько камней (но не все) из коробки в соседнюю пустую. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?

5. Можно ли разрезать клетчатый квадрат 99×99 на прямоугольники с периметром 22, если разрезы можно проводить только по линиям сетки?

6. Пусть x, y и z — положительные числа такие, что $xy + yz + zx = 3xyz$. Докажите неравенство $x^2y + y^2z + z^2x \geqslant 2(x + y + z) - 3$.

7. Рассмотрим натуральные a, b и n, удовлетворяющие равенству $2^n - 1 = ab$. Пусть 2^d — максимальная степень двойки, которая делит число $(a + 1)(b - 1)$. Докажите, что d четно.

8. Пусть M — середина боковой стороны AB трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$), O — точка пересечения диагоналей, причем $AO = BO$. На продолжении OM за точку M взяли точку P такую, что $\angle PAC = 90^\circ$. Докажите, что $\angle AMD = \angle APC$.

IX *Южный математический турнир • 2014 год*
Лига «Юниор» • 22 сентября

Второй тур.

1. Несколько хамелеонов двух цветов — красного и синего — стоят по кругу. Каждую минуту все хамелеоны, оба соседа которых того же цвета, что и сам хамелеон, меняют свой цвет. Известно, что перекрашивания продолжались ровно 2014 минут, после чего прекратились. Какое минимальное количество хамелеонов могло стоять в круге?

2. Докажите, что для любого натурального числа n существуют попарно различные натуральные числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ такие, что $a_n! = a_{n-1}!a_{n-2}!\dots a_1!$.

3. На серединных перпендикулярах к сторонам AB и BC треугольника ABC отмечены точки E и F соответственно. Оказалось, что $AEFC$ — параллелограмм. Докажите, что отрезок AE равен радиусу описанной окружности.

4. По кругу стоят 100 коробок, в одной лежит 777 камней, остальные — пустые. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход можно переложить один или несколько камней (но не все) из коробки в соседнюю пустую. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?

5. Можно ли разрезать клетчатый квадрат 99×99 на прямоугольники с периметром 22, если разрезы можно проводить только по линиям сетки?

6. Пусть x, y и z — положительные числа такие, что $xy + yz + zx = 3xyz$. Докажите неравенство $x^2y + y^2z + z^2x \geqslant 2(x + y + z) - 3$.

7. Рассмотрим натуральные a, b и n, удовлетворяющие равенству $2^n - 1 = ab$. Пусть 2^d — максимальная степень двойки, которая делит число $(a + 1)(b - 1)$. Докажите, что d четно.

8. Пусть M — середина боковой стороны AB трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$), O — точка пересечения диагоналей, причем $AO = BO$. На продолжении OM за точку M взяли точку P такую, что $\angle PAC = 90^\circ$. Докажите, что $\angle AMD = \angle APC$.