Девятый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 20–26.09.2014

Гранд-лига, 3 тур. 24.09.2014

1. Пусть p — простое число, а a, b и c — натуральные числа. Известно, что все пять чисел p, a, b, c и $pa+b$ попарно взаимно просты. Докажите, что среди натуральных чисел $k < pc$, удовлетворяющих условию

$$\left\{\frac{ak}{c}\right\} + \left\{\frac{bk}{pc}\right\} \geqslant 1,$$

поровну чисел, дающих остатки 1 и 2 при деления на p.

2. На плоскости расположены квадрат со стороной 20 и три круга радиуса 10. Обозначим через S площадь части квадрата, не покрытой кругами, а через s — наименьшее целое число, не меньшее S. Найдите наименьшее возможное значение s.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 3y + 3z + 4 \\ y^3 + z^3 = 3z + 3x + 4 \\ z^3 + x^3 = 3x + 3y + 4 \end{cases}$$

в вещественных числах.

4. Даны натуральное число n и монотонно возрастающая функция $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Найдите наибольшее значение выражения

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\left|x_i - \frac{2i-1}{2n}\right|\right)$$

по всевозможным наборам $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant 1$. (Ответ требуется выразить через значения функции f в конечном количестве точек.)

5. Натуральные числа a и b таковы, что $a^3 + b^3 + ab$ делится на $ab(a - b)$. Докажите, что $\text{НОК}(a, b)$ является точным квадратом.

6. Окружность, вписанная в остроугольный треугольник ABC, имеет центр I и касается стороны BC в точке D. Точка K лежит на меньшей дуге BC описанной окружности; пусть L — середина отрезка, соединяющего проекции точки K на BI и CI. Оказалось, что $LB = LC$. Докажите, что $\angle BAK = \angle CAD$.

7. Выпуклый n-угольник разбит диагоналями, не пересекающимися во внутренних точках, на треугольники. Докажите, что можно выбрать хотя бы $\lceil n/3 \rceil$ вершин, которые попарно не соединены между собой ни сторонами, ни диагоналями разбиения.

8. Пусть AD — биссектриса остроугольного треугольника ABC. Точка M на луче AB выбрана так, что $\angle MDA = \angle ABC$, а точка N на луче AC — так, что $\angle NDA = \angle ACB$. Наконец, обозначим через P точку пересечения прямых MN и AD. Докажите, что $AD^3 = AP \cdot AB \cdot AC$.

9. Отметим в координатном пространстве все точки с целыми координатами; две различных отмеченные точки назовём *соседними*, если расстояние между ними меньше 1000. Исходно в каждой отмеченной точке стоит действительное число. За ход можно выбрать точку, в которой стоит такое же число, что и в большинстве её соседей, и заменить число в ней на любое другое число. Может ли так случиться, что число в какой-то точке будет меняться бесконечное количество раз?

10. Даны натуральные числа $k > m$. Пусть A — алфавит из m букв, а B — алфавит из $2m$ букв. Обозначим через a_k количество $2k$-буквенных слов в алфавите A, в каждом из которых каждая буква из A присутствует, причём чётное число раз. Обозначим через b_k количество $2k$-буквенных слов в алфавите B, в каждом из которых каждая буква из B присутствует нечётное число раз. Найдите a_k/b_k.